Correction des exercices de la page 16 et 17 du livre Analyse Mathématique.

Mohamed El Merouani

I

$$E = \{0, 1\}$$

$$E \times E = \{(0,0); (0,1); (1,0); (1,1)\}$$

$$(0,0) \longmapsto 0 \qquad (1,0) \longmapsto 1$$

$$(0,1) \longmapsto 1 \qquad (1,1) \longmapsto 1$$

Chaque élément de l'ensemble de départ $(E \times E)$ admet une image et une seule dans l'ensemble d'arrivée (E).

Donc, on a bien une application de $E \times E$ dans E.

II

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

D'abord f est bien une application car chaque élément de $\mathbf{R}$ admet une image et une suele (existe et unique).

1 f n'est pas une bijection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, car on peut trouver des réels de l'ensemble d'arrivée qui sont négatifs n'ayent pas d'antécédants.

2 f n'est pas une bijection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^+$, car on a par exemple :

$$1 \in \mathbf{R} \qquad -1 \in \mathbf{R}; 1 \neq -1$$

mais

$$f(1) = f(-1) = 1^2 = (-1)^2 = 1$$

soit

$$y \in \mathbf{R}^+, alors\ y = f(\sqrt{y}) = f(-\sqrt{y})$$

i.e y admet deux antécédents. Donc f n'est pas une bijection.

3 Même raisennement que 1.

4 Dans ce cas, oui, ona une bijection de $\mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}^+$

$$\forall\ y \in \mathbf{R}\ \exists!\ x \in \mathbf{R}\ telque\ f(x) = y$$

i.e

$$x^2 = y \Longrightarrow x = \sqrt{y}\ (existe\ et\ unique)$$

Alors

$$f^{-1} : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}^+$$
$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

$$f^{-1} \circ f : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}^+$$

$$x \longmapsto f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(x^2)$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{x^2} \\ &= |x| \\ &= x \qquad car\ x \geq 0 \end{aligned}$$

d'ou

$$f^{-1} \circ f = id_{\mathbf{R}^+}$$

et

$$f \circ f^{-1} : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}^+$$
$$x \longmapsto f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x))$$

$$\begin{aligned} &= f(\sqrt{x}) \\ &= (\sqrt{x})^2 = x \end{aligned}$$

de Même

$$f \circ f^{-1} = id_{\mathbf{R}^+}$$

III

$$f : [0, 2\,[\longrightarrow [0, +\infty\,[$$
$$x \longmapsto \sqrt{\frac{x}{2-x}}$$

D'abord, comme $x \in \Big[0, 2\Big[$, $l'expression \sqrt{\frac{x}{2-x}}$ est bien définie (existe dans $\mathbf{R}^+$).
Donc f est une application.
f est une bijection, car pour $y \in \mathbf{R}^+$, il existe $x \in [0, 2\,[$ tel que

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Longrightarrow \sqrt{\frac{x}{2-x}} = y \\ &\Longrightarrow \frac{x}{2-x} = y^2 \\ &\Longrightarrow x = \frac{2y^2}{x+y^2} \end{aligned}$$

$$positive\ et\ <\ 2\ (existe\ et\ unique\ pour\ un\ y \in [0, +\infty\,[)$$

$$f^{-1} : [0, +\infty\,[\longrightarrow [0, 2\,[$$
$$x \longmapsto \frac{2x^2}{1+x^2}$$

IV

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$x \longmapsto 2 - x^2$$

- f n'est pas bijective car si on prend, par exemple, 1 et -1 ($1 \neq -1$) mais $f(1) = 2-1 = 1$ et $f(-1) = 2 - 1 = 1 \implies f(1) = f(-1)$.
- ou encore un élément de l'ensemble d'arrivée y peut avoir plusieurs (deux) antécédents. En effet :
  Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) = y$

$$\begin{aligned} &\implies 2 - x^2 = y \\ &\implies x = \sqrt{2-y} \\ &ou\ x = -\sqrt{2-y} \end{aligned}$$