

Contrôle final de Mathématiques I
(Durée 2 heures)

Exercice 1 :

Utiliser la règle de l'Hospital pour calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(1+x)}{x}$$

Exercice 2 :

Résoudre les équations suivantes :

- 1) $e^{2x} + 2e^x - 8 = 0$
- 2) $\text{Log}(3-x) = \text{Log}(x-2) - 1$

Exercice 3 :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 3}{2u_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

- 1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > \sqrt{3}$.
- 2) Montrer par la méthode d'étude de fonction que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- 3) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4 :

1) Ecrire la formule des accroissements finis pour : $f(t) = \sqrt{1+t}$ sur $[0, x] \subset [0, +\infty[$.

2) En déduire l'inégalité suivante : $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$, pour tout $x > 0$.

3) Utiliser 1) pour déduire la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - 1}{\sin x}$.

Exercice 5 :

Soit $f(x) = \text{Log}(1+x) - e^{-x}$

- 1) Calculer sa dérivée f' . En déduire que f réalise une bijection de $[0, 2]$ dans $f([0, 2])$.
- 2) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans $[0, 2]$.

Bonne Chance !