Statistique appliquée à la logistique

Pr. Mohamed El Merouani

Plan général:

- 1ère partie:
  – Introduction (Définition de la Logistique)
- 2ème partie:
  – Mise à niveau (Rappel)
- 3ème partie:
  – Applications en Logistique

1ère Partie (Plan):

- Définition de la Logistique.
- Les fonctions Logistiques.
- Evolution du concept.
- Les enjeux de la Logistique.
- Les facteurs de la Logistique.

Introduction:

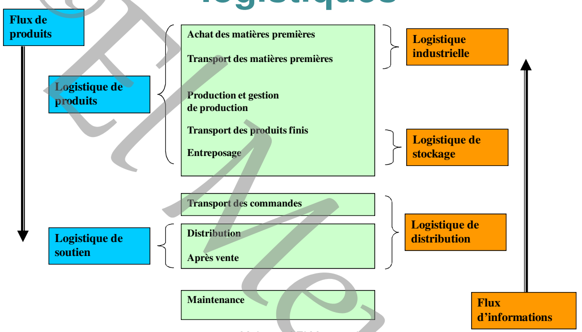
- Définition de la logistique :

❖ **L'art du calcul logique et du raisonnement .**

❖ **Fonction pour satisfaire les besoins internes et externe de l'entreprise**

❖ **C'est une fonction transversal dans l'entreprise**

Description des fonctions logistiques



Évolution du concept :

Dans les années 70 :

La logistique ce limité à la fonction « transport ».

A nos jours :

Elle se rapporte à l'ensemble des activités qui touchent à la fois les flux physiques et les flux d'information.

Les enjeux de la logistique :

- *Améliorer la réactivité de l'entreprise et éclairer les choix stratégiques*
- *L'innovation et L'améliorer de la maîtrise des coûts logistique*
- *la logistique permet une meilleure maîtrise des coûts*
- *la logistique conditionne également l'externalisation et la diversification de l'entreprise*

Les Facteurs de la logistique :

- La gestion des approvisionnements
- La gestion du stock
- La gestion du transport
- La maintenance logistique

2ème Partie (Plan):

- Notion de probabilité.
- Variables aléatoires.
- Quelques lois de probabilités usuelles.
- Addition de variables aléatoires indépendantes

Notion de probabilité

Définitions de probabilité

- Il existe plusieurs définitions:
  - Définition fréquentielle
  - Définition axiomatique ou ensembliste
  - Définition bayesienne

Notion d'événement

- Un événement est la réalisation d'un résultat possible.
- On dit que cet événement est aléatoire lorsque sa réalisation est soumise au hasard.
- **Exemples**:
  - Obtenir 5 en lançant un dé
  - Amener face en lançant une pièce de monnaie,…

Notation ensembliste

- L'ensemble de tous les résultats possibles, on le note Ω et appelé ensemble fondamental.
- Les événements sont des parties (des sous-ensembles) de Ω, sont notés A, B, C,…

Définitions de probabilité

- **Fréquentielle:**

$$P(A) = \frac{nbre\, de\, cas\ favorables}{nbre\, de\, cas\ possibles}$$

- **Axiomatique:**
À chaque événement *A*, on associe un nombre *P(A)* qui exprime le degré de possibilité de réalisation de l'événement *A* avec $0 \leq P(A) \leq 1$ appelé probabilité de l'événement A vérifiant les propriétés suivantes:
  - *P(Ω)=1*
  - Si A et B sont deux événements tels que *A∩B=Ø* alors *P(AUB)=P(A)+P(B)*

Probabilité conditionnelle:

- Soit un événement A tel que P(A)>0.
- La probabilité d'un événement B calculée sous la condition que A a été réalisé, que l'on note P(B/A) s'appelle la probabilité conditionnelle de l'événement B par l'événement A et on a:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$ avec P(A)>0

- Analogiquement, on peut définir:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ avec P(B)>0

- On déduit alors que

$$\boxed{\begin{array}{c} P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A) \\ P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) \end{array}}$$

et

Théorème des probabilités composés

Evénements dépendants et événements indépendants:

- On considère deux événements A et B.
- L'événement A est dit indépendant de l'événement B si sa probabilité ne dépend pas de la réalisation ou de la non-réalisation de B, c'est-à-dire P(A/B)=P(A).
- Dans le cas contraire, si P(A/B)≠P(A), l'événement A dépend de B.

Dépendance et indépendance des événements:

- La dépendance et l'indépendance des événements sont toujours mutuelles: si A ne dépend pas de B, B non-plus ne dépend pas de A, et inversement.
- Les événements A et B sont dits indépendants, si l'apparition de l'un d'eux n'influx pas sur la probabilité de l'apparition de l'autre.

Dépendance et indépendance des événements:

- Le théorème des probabilités composés acquiert une forme particulièrement simple lorsque les événements qui constituent le produit sont indépendants:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Variables aléatoires.

Variables aléatoires

- Une variable aléatoire notée *X* est une application de l'ensemble fondamental *Ω* dans l'ensemble *IR* des nombres réels, qui fait correspondre à tout événement *A* un nombre réel.
- **Exemple:**

  Pour l'expérience du lancement d'une pièce de monnaie:

  $X: \Omega \longrightarrow IR$

  {amener pile} $\longrightarrow$ *X*({amener pile})=0

  {amener face} $\longrightarrow$ *X*({amener face})=1

  Et on a $P(X=0)=1/2$; $P(X=1)=1/2$

Variables aléatoires

- Il y a deux types de variables aléatoires:
  - Variable aléatoire discrète
  - Variable aléatoire continue
- Si X prend des valeurs discrètes 0, 1, 2, … elle est dite discrète.
- Si *X* prend des valeurs continues sur tout un intervalle de *IR*, par exemple [*a, b*], elle est dite continue.

Loi de probabilité d'une variable aléatoire:

- **Discrète:**

  La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est définie par:
  - Les valeurs que peut prendre X: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
  - Les probabilités de ces valeurs $P(X=x_i)=p_i$

Exemple

- Pour l'expérience de lancement d'une pièce de monnaie, on a:

  $P(X=0)=1/2$; $P(X=1)=1/2$

  Alors $P(X=0)+P(X=1)=1$
- La loi de probabilité de X est résumée par le tableau suivant:

x_i	0	1	Σp_i
p_i	1/2	1/2	1

- **Continue:**
  Les valeurs que prendre *X* sont continues, alors la probabilité de ces valeurs est une fonction continue *f*, appelée fonction densité de probabilité.
- **Propriétés de la densité:**
  - La fonction f est à valeurs positives sur l'ensemble de définition *D* de la variable aléatoire X
  - La fonction f est nulle en dehors de D l'ensemble de définition de X.
  - L'intégrale de f sur D l'ensemble de définition de X est égale à 1.

$$\int_D f(x)dx = 1$$

Espérance mathématique:

- Discrète:
- L'espérance mathématique d'une v. a. discrète X, notée E(X) est:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i\, P(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i$$

- Continue:
- L'espérance mathématique d'une v. a. continue X, est donnée par:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

Propriétés de l'espérance:

- Soient *X* et *Y* deux v. a., et α et β deux réels quelconques, alors:

$$E(\alpha X+\beta)=\alpha E(X)+\beta$$

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

$$E(X-Y)=E(X)-E(Y)$$

Variance :

- La variance d'une v.a. X, notée Var(X) est définie par:

$$Var(X)=E\left[(X-E(X))^2\right]$$

- Ou encore:

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$

Écart-type:

- L'écart-type d'une variable aléatoire X, noté σ(X), est défini comme la racine carrée de sa variance,

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Fonction de répartition:

- La probabilité pour que la variable aléatoire X prenne une valeur inférieure ou égale à x est une fonction F(x).
- Cette fonction est appelée fonction de répartition de x.

  $F(x)=P(X\leq x)$.
- La fonction F(x) est une fonction en escalier, croissante de 0 à 1.

Exemple de fonction de répartition:

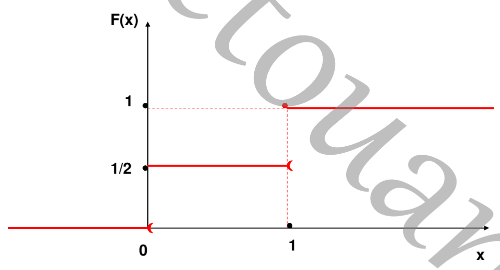
- Pour l'expérience de lancement d'une pièce de monnaie, on a la loi de probabilité de X est résumée par le tableau suivant:

x_i	0	1	Σp_i
p_i	1/2	1/2	1

- Sa fonction de répartition sera:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1/2 & \text{si } 0\leq x<1 \\ 1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

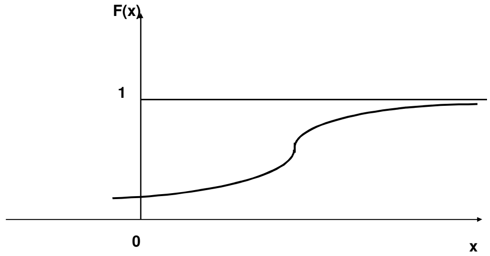
Représentation graphique de F(x):



Fonction de répartition d'une v.a. continue:

- On définit la fonction de répartition F d'une v. a. continue X de la même manière que pour une v.a. discrète, c'est-à-dire $F(x)=P(X \leq x)$.
- La fonction continue $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ est croissante de 0 à 1 lorsque x varie de -∞ à +∞.
- Par conséquent, une v.a. continue est une v.a. dont la fonction de répartition est continue.
- La fonction de densité f d'une v.a. continue X est la dérivée de da fonction de répartition F, c'est-à-dire $F'(x)=f(x)$.

Représentation graphique de F(x) continue:



Conséquences:

- Pour X v.a. continue on a:
- $P(X=c)=0$ avec c une constante réelle.
- $P(a<X<b)=F(b)-F(a)$ avec a et b des réelles.
- $P(X\leq a)=P(X<a)=\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt$
- $P(X\geq b)=P(X>b)=\int_{b}^{+\infty} f(t)\,dt$

Loi de probabilités conjointes de deux v. a. discrètes:

- Un couple de v. a. (X, Y) peut prendre les valeurs successives suivantes:

  (x_1,y_1) ; (x_2,y_2) ; …; (x_i,y_j) ; …; (x_n,y_m)

  A chaque couple (x_i,y_j) correspond une probabilité p_{ij} d'observer simultanément la valeur x_i pour X et la valeur y_j pour Y:

  $p_{ij}=P(X=x_i \text{ et } Y=y_j)=P(X=x_i,\ Y=y_j)$
- On a $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}=1$

Loi de probabilités conjointes de deux v. a. continues:

- La loi de probabilité conjointes d'un couple de v. a. (X,Y) est définie lorsqu'on connaît:

1. Le domaine de définition du couple (où la fonction de densité de probabilité est non nulle) et;
2. La fonction de densité de probabilité conjointe f qui doit vérifier:
   a. $f(x,y) \geq 0$
   b. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$

Indépendances des variables aléatoires discrètes :

- Deux v. a. discrètes X et Y sont dites indépendantes si

$$P(X=x_i;\ Y=y_j)=P(X=x_i).P(Y=y_j)$$

pour tout x_i et y_j.

Indépendances des variables aléatoires continues :

- Deux v. a. continues X et Y de fonctions de densités de probabilités marginales respectives f_1 et f_2 et de fonctions de probabilité conjointe f sont dites indépendantes si et seulement si

$$f(x,y) = f_1(x).f_2(y)$$

Covariance entre deux variables aléatoires:

- La covariance entre deux v. a. X et Y, notée $Cov(X,Y)$, est définie par

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

- Cas discrèt:

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j P(X=x_i, Y=y_j) - E(X)E(Y)$$

- Cas continue:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\ y\ f(x,y)\ dx\ dy - E(X)E(Y)$$

Propriétes:

- Soient X et Y deux v. a., alors on a:
  - a) $E(XY)=E(X)E(Y)+Cov(X,Y)$
  - b) $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$
  - c) $Var(\alpha X+\beta)=\alpha^2 Var(X)$ où α et β sont deux réels quelconques.
- Si les variables X et Y sont indépendantes, alors:
  - a) $Cov(X,Y)=0$
  - b) $E(XY)=E(X)E(Y)$
  - c) $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$

Coefficient de corrélation entre deux v. a. :

- Le coefficient de corrélation entre deux v. a. X et Y, notée ρ_{xy} est défini par

$$\rho_{xy} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- Le coefficient de corrélation varie entre -1 et 1:

$$-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$$

Quelques lois de probabilités usuelles

Quelques lois de probabilités usuelles

Lois de probabilités discrètes

Loi de Bernoulli:

- Une v. a. X suit une loi de Bernoulli si elle prend les deux valeurs 1 et 0 avec $P(X=1)=p$ et $P(X=0)=q$ où $p+q=1$.
- $\{X=1\}$ est dit événement succès et $\{X=0\}$ est dit événement échec.
- X représente donc le nombre de succès obtenu après la réalisation d'une seule expérience aléatoire.

Loi de Bernoulli:

- La loi de probabilité de X suivant une loi de Bernoulli est:

x_i	1	0	Σp_i
p_i	p	q=1-p	1

Alors $E(X)=\Sigma x_i p_i=1xp+0xq=p$

$Var(X)=\Sigma x_i^2 p_i-E(X)^2=px1^2+qx0^2-p^2=p-p^2$

$Var(X)=p(1-p)=pq$

Loi Binômiale:

- Considérons, lors d'une certaine expérience, un événement qui:
  - Soit se réalise avec la probabilité *p* (*p*=probabilité du succès).
  - Soit ne se réalise pas avec la probabilité *q=1-p* (*q*=probabilité d'échec).
- La probabilité de *k* réalisation (succès) de cet événement, au cours de *n* répétitions successives indépendantes de la même expérience, est fournie par la loi de probabilité binômiale: $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$

Loi Binômiale:

- On la note symboliquement *B(n, p).*
- La loi binômiale est une loi de probabilité discrète, mais finie; en effet, le nombre de réalisation *k* est égale à *0, 1, 2, …, n.*
- Le coefficient $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

  où *n!* et *k!* indiquent le factoriel de *n* et de *k*, on a: *n!=1x2x3x…xn*

Loi Binômiale:

- Espérance mathématique: $E(X)=np$
- Variance mathématique: $Var(X)=npq$
- Ecart-type: $\sigma(X)=\sqrt{npq}$
- La loi binômiale rend compte de tous les phénomènes répétés de manière indépendante pouvant prendre deux états, tels que: succès ou échec, tout ou rien.

Loi de Poisson:

- On dit qu'une v. a. obéit à une loi de Poisson, si elle est susceptible de prendre toutes les valeurs entières 0,1,2,…,k,…,n, les probabilités associées étant $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots, p_n$, avec

$$p_k = P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!}$$

- λ étant un paramètre positif, et e la base des logarithmes népériens.
- La constante λ s'appelle le paramètre de la loi.
- La loi de Poisson est notée P(λ).

Loi de Poisson:

- Espérance mathématique: $E(X)=\lambda$
- Variance mathématique: $Var(X)=\lambda$
- Ecart-type: $\sigma(X)=\sqrt{\lambda}$
- La loi de Poisson est appelée loi des petites probabilités. On l'utilise pour représenter des phénomènes rares, tels que: nombre d'accidents, nombre de pannes, nombre de déchets dans une fabrication…

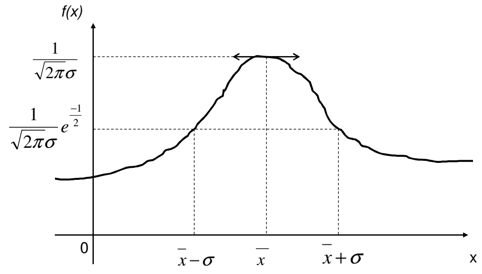
Quelques lois de probabilités usuelles

Lois de probabilités continues

Loi Normale:

- La loi normale est la loi de probabilité d'une v.a. continue *X*, dont la densité de probabilité est:
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$
- On dit que l'on est en présence de la loi normale de moyenne $\bar{x}$ et d'écart-type σ.
- On la note par $N(\bar{x}, \sigma)$
- Les deux paramètres de la loi sont $\bar{x}$ et σ.

Représentation graphique de $N(\bar{x},\sigma)$:



Loi normale centrée, réduite

Variable normée:

- Soit une v.a. X de réalisations x_i de moyenne $\overline{X}$ et d'écart-type σ_X.
- Définissons une nouvelle v.a. T de réalisations t_i telle que: $T = \frac{X-\overline{X}}{\sigma_X}$ de réalisations $t_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x}$
- La v.a. T de réalisations t_i est dite normée, si:
  - La moyenne arithmétique $\bar{t}$ est nulle: $\bar{t}=0$ (centrée)
  - L'écart-type σ_t est égal à l'unité: $\sigma_t = 1$ (réduite).

Définition de la loi normale centrée réduite:

- En faisant le changement de variable

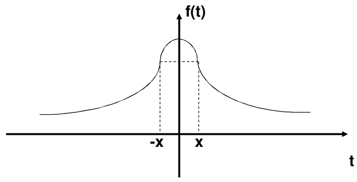
$$t = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

la loi normale N(m,σ) s'écrit:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{-[(t\sigma+\bar{x})-\bar{x}]^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

cette loi est la loi normale, centrée réduite, car elle est de moyenne nulle et d'écart-type égal à l'unité. On la note N(0,1).

Allure et propriété de la loi normale réduite:



C'est une fonction symétrique par rapport à l'axe des ordonnées car elle est paire f(-x)=f(x)

Ainsi les tables de la loi normale centrée réduite, donnent les valeurs de la fonction f(t) uniquement pour des valeurs positives de la variable t.

La probabilité pour que T prenne une valeur de l'intervalle (t_1,t_2)

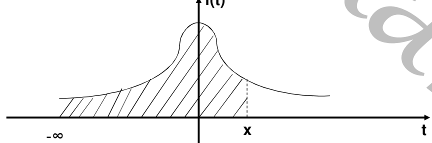
- S'écrit alors:

$$P(t_1 < T < t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

Fonction intégrale de la loi normale centrée réduite:

- On définit la fonction intégrale π(t) de la loi normale centrée réduite, en intégrant la fonction f(t) densité de probabilité de t:

$$\pi(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$



Propriétés:

- On démontre que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

- L'aire comprise entre la courbe N(0,1) et l'axe des t est égale à l'unité.

Exercice:

- La taille d'un groupe de 2000 personnes obéit à une loi normale N(170 cm, 5 cm).
- On demande de déterminer:

1. Le nombre de personnes dont la taille est comprise entre 168cm et 175cm.
2. La probabilité pour qu'une personne ait une taille supérieure à 180cm.

Solution:

1. Définissons la variable centrée réduite T à partir de la variable aléatoire *X*:

$$T = \frac{X-170}{5}$$

- Alors P(168<X<175)=P(-0,4≤t≤+1)=
  =π(1)- π(-0,4)= π(1)-(1- π(0,4))=
  =π(1)+ π(0,4)-1
  Soit, en cherchant les valeurs de π(1) et de π(0,4) dans la table de la fonction intégrale de la loi normale centrée réduite: croisement de la ligne 1,0 et de la colonne 0,00; croisement de la ligne 0,4 et de la colonne 0,00.

- P(168≤x≤175)=0,8413+0,6554-1=0,4967
- Il y a donc: 2000x0, 4967≈993personnes dont la taille est comprise entre 168cm et 175cm.

2. La probabilité pour qu'une personne ait une taille supérieure à 180cm est:
   P(X>180)=P(T>2)=1-π(2)=1-0,9772=0,0228 soit une probabilité de 2,3%.
   Il y a alors vraisemblablement 2000x0,0228≈45personnes dont la taille dépasse 180cm.

Addition de variables aléatoire indépendantes

Addition de variables aléatoire binomiales indépendantes:

- Soit X une v. a. obéissant à une loi binomiale $\mathrm{B(n,p)}$ et Y une v. a. obéissant à une loi binomiale $\mathrm{B(m,p)}$.
- Si X et Y sont deux v. a. indépendantes, on démontre que:

➢ La v. a. $Z=X+Y$ suit une loi binomiale $\mathrm{B(n+m,p)}$

Addition de variables aléatoire de Poisson indépendantes:

- Soit X une v. a. obéissant à une loi de Poisson $P(\lambda)$ et Y une v. a. obéissant à une loi de Poisson $P(\mu)$
- Si X et Y sont deux v. a. indépendantes, on démontre que:

➢ La v. a. $Z=X+Y$ suit une loi de Poisson $P(\lambda+\mu)$.

Addition de variables aléatoire normales indépendantes:

- Soit X une v. a. obéissant à une loi normale $N(\bar{x},\sigma_x)$ et Y une v. a. obéissant à une loi normale $N(\bar{y},\sigma_y)$
- Si X et Y sont deux v. a. indépendantes, on démontre que:

➢ La v. a. $Z=X+Y$ suit une loi normale $N(\bar{z},\sigma_z)$:

❖ de moyenne $\bar{z}=\bar{x}+\bar{y}$

❖ d'écart-type $\sigma_z=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$

➢ La v.a. V=X-Y suit une loi normale $N(\bar{v},\sigma_v)$

❖ de moyenne $\bar{v}=\bar{x}-\bar{y}$

❖ d'écart-type $\sigma_v=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$

- Ce théorème se généralise au cas de n variables indépendantes.

Références:

- Abdelmajid Gagou: «Introduction aux probabilités: cours avec exercices corrigés », Impremerie de Fedala, 1ère édition, 1996.
- M. Ellatifi: «Exercices et problèmes résolus de statistiques-1: Probabilités », Afrique Orient, 1984.
- Mustapha Kchirid: « Calcul des probabilités: Exercices corrigés avec rappel de cours », Editions El Badil, 2ème édition, 2002.