# Chapitre 7 : Développements limités et Formules de Taylor

## I. Comparaison des fonctions au voisinage d'un point :

Les études de fonctions nous ramènent constamment aux limites usuelles :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{Log\ x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x}} = 0$$

Qualitativement, on exprime parfois ces égalités en disant : « A l'infini, *Log x* est petit devant *x*, lui-même petit devant $e^x$ ». Ce type d'expression, qui constitue simplement une comparaison des ordres de grandeur de ces différentes fonctions vers + ∞, est à la base d'une terminologie standard de comparaison des fonctions que voici.

### 1.- Fonction négligeable devant une autre :

**a.- Définition et notation :**

On dit que *f* est négligeable devant g au voisinage d'un point $x_0$ ($x_0 \in IR$ ou $x_0 = \pm\infty$ ) si, et seulement si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

On note cela par $f = o(g)$ vers $x_0$

Ce qui se lit « *f* égale petit o de *g* au voisinage de $x_0$ »

**b.- Exemple :**

1-) Au voisinage de 0, $f(x)= x^2$ est négligeable devant $g(x)=x$ puisque :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0$$

Ainsi $x^2 = o(x)$ vers 0

2-) Au voisinage de $+\infty$, $f(x)=Log\ x$ est négligeable devant $g(x)=x$, lui-même négligeable devant $h(x) = e^x$ (Conséquence du fait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{Log\ x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ )

Ainsi $Log\ x = o(x)$ vers $+\infty$ . et $x = o(e^x)$ vers $+\infty$.

**c.- Remarque :**

Il est essentiel de bien comprendre que la notion de fonction négligeable devant une autre n'a de sens qu'au voisinage d'un certain point.

Ainsi $f(x)= x^2$ qui est négligeable devant $g(x) = x$ vers 0, ne l'est pas vers $+\infty$ puisqu'au contraire c'est alors $g(x)=x$ qui devient négligeable devant $f(x) = x^2$ vers $+\infty$ : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$