Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire
Tétouan

Année Universitaire 2005/2006
Filière : Sc. Éco. & Gestion
Semestre : Deuxième (S2)
Module : Méthodes Quantitatives I
Élément : Mathématiques I

Contrôle continu final
(Durée 2 heures)

Problème n° 1:

Calculer les intégrales suivantes :

$$\mathrm{I} = \int_2^3 \frac{12x - 3x^2}{x^2 - 2x + 1}\, dx \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J} = \int_3^5 \frac{2x^2 - 4x + 2}{2x - 5}\, dx$$

Problème n° 2:

On considère la suite qui, à tout n entier strictement positif, associe le nombre U_n tel que :

a) U_n est strictement positif.

b) La suite est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

c) Les trois premiers termes vérifient l'égalité :

$$5\mathrm{U}_1\mathrm{U}_3 = 6\mathrm{U}_2 \qquad \text{(E)}$$

On demande de :

1) Calculer U_1.

   Exprimer U_n en fonction de n.

   Calculer U_2 et U_3 et vérifier (E).

2) Montrer que la suite est strictement décroissante et converge vers 0.

3) Exprimer la somme $\mathrm{S}_\mathrm{n} = \mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2 + \mathrm{U}_3 + \cdots + \mathrm{U}_\mathrm{n}$ en fonction de n.

4) Trouver la limite de S_n.

Problème n° 3:

On considère la fonction f définie par $f(x) = Log\left(1 + e^x\right)$

1) Donner l'ensemble de définition de *f*.

2) Etudier les variations de *f*

3) Montrer que la courbe (C) représentative de *f* a pour asymptote oblique la droite d'équation $y = x$.

4) Tracer (C).

Correction du contrôle final 2005-2006

Problème n°1 :

$$I=\int_2^3 \frac{12x-3x^2}{x^2-2x+1}dx$$

On a : $$\frac{-3x^2+12x}{x^2-2x+1}=A+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$=-3+\frac{6}{x-1}+\frac{9}{(x-1)^2}$$

$$I=-3\int_2^3 dx+6\int_2^3\frac{dx}{x-1}+9\int_2^3\frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$=-3+6[Log(x-1)]_2^3-9\left[\frac{1}{x-1}\right]_2^3=-3+6Log2+\frac{9}{2}$$

$$J=\int_3^5 \frac{2x^2-4x+2}{2x-5}dx$$

On a : $$\frac{2x^2-4x+2}{2x-5}=ax+b+\frac{c}{2x-5}$$

$$=x+\frac{1}{2}+\frac{9}{2(2x-5)}$$

$$J=\int_3^5\left(x+\frac{1}{2}+\frac{9}{2(2x-5)}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^5+\frac{1}{2}\times 2+\frac{9}{4}\int_3^5\frac{d\left(x-\frac{5}{2}\right)}{x-\frac{5}{2}}$$

$$=\left(\frac{25}{2}-\frac{9}{2}\right)+1+\frac{9}{4}\left[Log\left(x-\frac{5}{2}\right)\right]_3^5$$

$$=9+\frac{9}{4}\left(Log\frac{5}{2}-Log\frac{1}{2}\right)=9+\frac{9}{4}Log5$$

Problème n°2 :

1) Calcul de U_1 :

Comme on a : $U_2=\frac{2}{5}U_1$ et $U_3=\left(\frac{2}{5}\right)^2U_1$

La relation (E) donne $$5U_1^2\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{12}{5}U_1$$

$$\Leftrightarrow 4U_1^2=12U_1$$

En écartant la solution banale (et sans intérêt) $U_1=0$, il vient que $\boxed{U_1=3}$.

Expression de U_n en fonction de n :
Par multiplication membre à membre des n égalités

$$\begin{cases} U_n = \frac{2}{5}U_{n-1} \\ U_{n-1} = \frac{2}{5}U_{n-2} \\ \vdots \\ U_2 = \frac{2}{5}U_1 \\ U_1 = 3 \end{cases}$$

Il vient, après simplification $\boxed{U_n = 3\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}}$

Calcul de U_2 et U_3 :

Compte tenu de cette relation, il vient que $U_2 = 3\times\frac{2}{5} = \frac{6}{5}$ et

$$U_3 = 3\times\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{12}{25}$$

Vérification de (E) :

On vérifie bien que $5U_1U_3 = 5\times 3\times\frac{12}{25} = \frac{36}{5} = 6U_2$

2) Comme $\forall n\in IN^*;\ \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2}{5} < 1$, la suite est donc strictement décroissante et converge vers 0, puisque $\frac{2}{5} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 0$

C'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

3) On a $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n = 3\left[1 + \frac{2}{5} + \cdots + \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right]$

$$= 3\times\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}} = 5\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$$

4) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ (puisque $\frac{2}{5} < 1$)

On a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 5}$

Problème n°3 :

$$f(x) = Log\left(1+e^x\right)$$

1) $D_f = IR$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} Log\left(1+e^x\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} Log\left(1+e^x\right) = +\infty$

2) $f\,'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$; $\forall x \in IR$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
f '(x)	+
f	$0 \nearrow +\infty$

3) Montrons que la courbe de *f* admet la droite *y*=*x* comme asymptote oblique :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[Log\left(1+e^x\right)-x\right]$$

On pose $\qquad e^x = \dfrac{1}{X} \Leftrightarrow x = -LogX$

Lorsque $x \to +\infty$; $e^x \to +\infty$ et $X \to 0$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{X\to+\infty}\left[Log\left(1+\frac{1}{X}\right)+LogX\right]$

$$=\lim_{X\to0}\left[Log\left(\frac{1+X}{X}\right)+LogX\right]=\lim_{X\to0}\left[Log(1+X)-LogX+LogX\right]$$

$$=\lim_{X\to0}Log(1+X)=Log1=0$$

4) Représentation graphique de la courbe de f :