Analyse Mathématique
Exercices proposés

Exercice 1 :

Etudier la limite de la fonction $f(x)=x^x$ lorsque x tend vers 0 par la droite.

Exercice 2 :

Trouver des équivalents de :

1) $x^2 \sin x$

2) $\dfrac{\sin^2 x - x}{\sin 2x + x}$

lorsque x tend vers 0.

Exercice 3 :

Soit $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$, $(n \in IN)$

1. Calculer I_0.
2. Calculer I_n en fonction de I_{n-1} pour $n \in IN^*$.
3. Application : calculer $\int_0^1 (3x^3 - 2x^2 + x + 1)e^{-x} dx.$
4. Recalculer cette intégrale en cherchant directement une primitive de $f(x) = (3x^3 - 2x^2 + x + 1)e^{-x}$ sous la forme $F(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{-x}$ où *a, b, c, d* sont quatre réels à déterminer.

Exercice 4 :

Établir l'inégalité suivante, en utilisant la formule de Taylor ou les développements limités :

1. $\forall x \geq 0, \quad x - \dfrac{x^2}{2} \leq Log(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}.$
2. $\forall x \in IR, \quad x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} \leq e^x$

Exercice 5 :

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x^3}{6} - x + \sin x$.

1. Calculer $f'(x), f''(x)$ et $f'''(x)$.
2. Donner le signe des fonctions f' et f''.
3. En déduire le sens de variations de f ainsi que son signe.

Exercice 6 :

Résoudre dans IR les équations :

1°) $(Log\, x)^3 - 4(Log\, x)^2 - 29(Log\, x) - 24 = 0$

2°) $e^{2x} - 4e^x - 29 - 24e^{-x} = 0$

Exercice 7 :

Calculer les limites suivantes en utilisant soit les fonctions équivalentes ou les D.L.:

1°) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2}$

2°) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)(Log\, tg\, x)$

3°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)e^{\frac{1}{x^2}}$

4°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+3Log\, x\right)$

Exercice 8 :

1°) Montrer que, pour tout nombre réel x, on a :

$$\cos 3x = (2\cos 2x - 1)\cos x .$$

2°) Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$S_n(\alpha) = Log\left(2\cos\frac{\alpha}{3}-1\right)+Log\left(2\cos\frac{\alpha}{3^2}-1\right)+\cdots+Log\left(2\cos\frac{\alpha}{3^n}-1\right)$$

où Log désigne le logarithme népérien et α un nombre réel donné de l'intervalle $I=\left]-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right[$.

a°) Justifier l'existence de $S_n(\alpha)$.

b°) En utilisant la première question, montrer que :

$$S_n(\alpha) = Log\cos\frac{\alpha}{2} - Log\cos\frac{\alpha}{2\cdot 3^n} .$$

c°) Calculer $S(\alpha)=\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\alpha)$.

Exercice 9 :

On considère les fonctions réelles de la variable réelle x, suivantes :

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

1. Etudier la parité de f et de g.
2. Montrer que $f^2(x)-g^2(x)=1$
3. Montrer que $f(x+y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$
   et $g(x+y)=g(x)f(y)+g(y)f(x)$
4. Montrer que les fonctions f et g sont dérivables sur IR et que $f'(x)=g(x)$ et $g'(x)=f(x)$.
5. Représenter sur un même repère les courbes de f et de g.

Exercice 10 :

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\frac{tg\, x}{\cos x}dx$ 2) $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ 3) $\displaystyle\int_0^1 t^4\sin 3t\, dt$

Exercice 11 :

1) Donner la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $f(x)=e^x$.

2) En déduire celle de la fonction $f_1(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et de la fonction $f_2(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Exercice 12 :

1) Trouver, en utilisant la méthode de dérivation et intégration, la formule de Taylor-Young à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction $g(x) = Log(1+x)$.
2) Déduire l'équation de l'asymptote à la courbe de $h(x) = x^2 Log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.