Les D.L de $\sqrt{1-x}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ s'obtiennent en faisant le changement de variable x=-t

Développement limité des fonctions trigonométriques :

1) Fonction cosinus :

Soit $f(x)$=cos x. On sait que f est indéfiniment dérivable sur IR et on a :

$$\forall n \in IN; \qquad f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

D'où $\qquad f^{(n)}(0) = \cos n\frac{\pi}{2}$

Par suite, $\qquad n = 2p \Rightarrow f^{(2p)}(0) = \cos p\pi = (-1)^p$

$$n = 2p+1 \Rightarrow f^{(2p+1)}(0) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right) = 0$$

Par conséquent, $\forall p \in IN$, on a :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o\left(x^{2p+1}\right)$$ au voisinage de zéro.

2) Fonction sinus :

Pour $f(x)$=sin x ; on sait de même que f est indéfiniment dérivable sur IR.

Pour $\forall n \in IN$, on a $\qquad f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

Par conséquent, pour x=0, on a $\qquad f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2}$.

Si n=2p alors $f^{(2n)}(0) = 0$

Si n=2p+1 alors $f^{(2p+1)}(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right) = (-1)^p$

Maintenant, $\forall x \in IR$, $\qquad f^{(2p+2)}(x) = \sin\left(x + (p+1)\pi\right) = (-1)^{p+1} \sin x$

Par conséquent, $\forall x \in IR$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$, au voisinage de zéro.

Développement limité usuel obtenu par dérivation et par intégration :

Du D.L

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + 0(x^n)$ au voisinage de 0

on déduit par dérivation

$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} + 0(x^{n-1})$ au voisinage de 0.

On a appliqué le théorème suivant :

Théorème :

Si une fonction f dérivable sur l'intervalle I admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0 $f(x) = P_n(x) + 0(x^n) \Rightarrow f'(x) = p'_n(x) + 0(x^{n-1})$ et si sa dérivée f' admet un D.L. d'ordre n-1 au voisinage de 0, alors la partie régulière du D.L. de f' est la dérivée de la partie régulière du D.L. de f

On a le D.L. d'ordre n au voisinage de 0

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + 0(x^n)$

Par intégration et en remarquant que F (0) = Log1=0

$Log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + 0(x^{n+1})$ au voisinage de zéro.

On a appliqué le théorème suivant :

Théorème :

Si une fonction f admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0 de partie régulière $p(x)$ et si, en plus, f est intégrable sur un intervalle formé contenant 0, alors $\int_0^x f(t)dt$ admet, au voisinage de 0, un D.L. d'ordre n+1 de partie régulière $\int_0^x p_n(t)dt \Rightarrow \int_0^x f(t)dt = \int_0^x p_n(t)dt + 0(x^{n+1})$

Le changement de variable $x = -t$ donne le D.L. de

$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - .... - \frac{x^{n+1}}{x+1} + 0(x^{n+1})$ au voisinage de 0.