

Exercice 1

On considère la suite (U_n) à termes strictement positifs de terme initial $U_0 = 1$ et telle que pour tout entier n , $U_{n+1} = e^2 \sqrt{U_n}$

où e désigne la base des logarithmes népériens, \ln , c'est-à-dire l'unique réel e tel que $\ln(e) = 1$.

1°) Calculer U_1 , U_2 et U_3 en fonction de e .

2°) Pour tout entier n , on pose $V_n = \ln(U_n)$
exprimer V_{n+1} en fonction de V_n .

3°) Soit la suite (W_n) de terme général, $W_n = V_n - 4$.
Montrer que (W_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le terme initial W_0 . Exprimer W_n en fonction de n et donner $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$.

4°) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ puis, après avoir exprimé U_n en fonction de V_n , calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.