Exemple :

Donner le D.L. de $x \mapsto Log(1+x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

$$Log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 0(x^3)$$

Remarque :

Les D.L. des fonctions usuelles est la décomposition de ces dernières sous forme d'une somme de termes de plus en plus « petits » au voisinage de 0. Chaque terme est négligeable, vers 0, devant le précédent, y compris bien sur le dernier, $o(x^n)$, négligeable devant tous les termes.

Exemple : (Fonction Logarithmique) on a :

$$Log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + 0(x^n) \text{ au voisinage de 0}$$

négligeable

devant

$$Log(1+x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} ... - \frac{x^n}{n} + 0(x^n) \text{ au voisinage de 0.}$$

négligeable

devant

1) **Opérations sur D.L :**

a) **Addition :**

Si au voisinage de zéro, f admet un D.L. d'ordre n ($f(x) = p_n(x) + 0(x^n)$) et g admet un D.L. d'ordre n ($g(x) = q_n(x) + 0(x^n)$), alors la fonction $f+g$ admet, au voisinage de zéro, D.L d'ordre n ($(f+g)(x) = p_n(x) + g_n(x) + 0(x^n)$)

Exemple : Donner le D.L., au voisinage de zéro de :

$f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, a l'ordre $n = 2p$ et $n = 2p+1$ avec $p \in IN$

On sait que, au voisinage de 0, on a

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!} + 0(x^n) = (\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}) + 0(x^n)$$

Donc, on peut déduire, par transformation de x en $-x$, que

$$e^{x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2}-....+(-1)\frac{x^{n}}{n!}+0(x^{n})=(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{x^{k}}{k!})+0(x^{n})$$

$$e^{x}+e^{-x}=(\sum_{k=0}^{n}(1+(-1)^{k})\frac{x^{k}}{k!})+0(x^{n})$$

$\underline{n=2p}$

$$f(x)=(\sum_{m=0}^{P}\frac{x^{2}m}{(2m)!})+0(x^{2p})$$

$$=1+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+....+\frac{x^{p2}}{(2p)!}+0(x^{2p})$$

Si $\underline{n=2p+1}$

$$f(x)=(\sum_{m=0}^{p}\frac{x^{2m}}{(2m)!})+0(x^{2P+1})$$

$$=1+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+...+\frac{x^{2P}}{(2p)!}+0(x^{2p+1})$$

Multiplication :

Exemples :

1) Donner le D.L à <u>l'ordre 3</u> au voisinage de 0 de la fonction $f(x)=e^{x}Log(1+x)$ au voisinage de 0, on a

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{6}+o(x^{3})$$ et $$Log(x+1)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}+o(x^{3})$$

Donc $e^{x}Log(x+1)=((1+x+\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{6}+o(x^{3}))(x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}+o(x^{3}))$

$$\left.\begin{array}{l}(1+x+\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{6})\times o(x^{3})=o(x^{3})\\ \\ (x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3})\times o(x^{3})=o(x^{4})\end{array}\right\}\text{et aussi } o(x^{3})+o(x^{4})=o(x^{3})$$

Et on a $o(x^{3})\times o(x^{3})=o(x^{3})$ car, on peut montrer que, on générale :

$$o(x^n)\times o(x^n)=o(x^n)$$

D’où :

$$e^x Log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}+\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{6}+\frac{x^4}{6}+\frac{x^5}{12}+\frac{x^6}{18}+o(x^3)$$

Les termes de degré ≥ 4 sont tous des $o(x^3)$, par conséquent

$e^x Log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^2+o(x^3)$ (Tous les termes négligeables devant x^3 se regroupent en un seul.)

$$=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$ au voisinage de 0.

2) D.L. au voisinage de 0, à l’ordre 3 de la fonction $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$

On a : $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ au voisinage de 0.

$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+o(x^3)$ au voisinage de 0.

Donc

$$\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+o(x^3)\right)$$

Mais, on a : $\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)\times o(x^3)=o(x^3)$

De même $\left(1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3\right)\times o(x^3)=o(x^3)$

Et $o(x^3).o(x^3)=o(x^3)$

D’où

$$\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+x-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{8}x^3-\frac{5}{16}x^4+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{4}+\frac{3}{16}x^4-\frac{5}{32}x^5+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}+\frac{3}{48}x^5-\frac{5}{96}x^6+o(x^3)$$

Les termes qui comportent une puissance de x supérieure strictement à 3 sont négligeables devant x^3 au voisinage de 0, donc

$$\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}=1+(-\frac{1}{2}+1)x+(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2})x^2+(-\frac{5}{16}+\frac{3}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6})x^3+o(x^3)$$

Finalement

$$\frac{e^x}{\sqrt{1+x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)$$

au voisinage de 0.

Inversion et D.L d'un quotient :

Exemple :

Donner le D.L à <u>l'ordre 2</u> au voisinage de 0 de la fonction :

$f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ au voisinage de 0, on a :

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 1} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

Donc : $\dfrac{x}{e^x - 1} = \dfrac{1}{x + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = \dfrac{1}{1+x}$

Si on pose X= $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6} + o(x^2)$ alors X appartient à un voisinage de 0 car x est dans un voisinage de 0. Et on applique le D.L

De $\dfrac{1}{1+x}$ à *<u>l'ordre 2</u>* au voisinage de 0 ;

$$\frac{1}{1+x} = 1 - X + X^2 + o(X^2)$$

D'où :

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - (\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)) + (\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2))^2 + o(X^2)$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)$$

$$= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)$$ au voisinage de 0.

Du fait de la simplification par x qui intervient au cours du calcul, il fallait prendre au départ le D.L de e^x à *l'ordre 3* pour obtenir celui de $\frac{x}{e^x - 1}$ a *l'ordre 2* à la fin.

Un tel phénomène est fréquent ; soit en le prévoit à l'avance, soit on décide systématiquement de faire les calculs avec des D.L l'ordre supérieur à celui demandé, par mesure de précaution.

5) D.L au voisinage d'un autre point que 0 :

Définition :

Soit x_0 ce point ($x_0 \neq 0$)

On dit que f une fonction définie au voisinage de x_0 , sauf peut être en x_0, admet au voisinage de ce point au D.L, l'ordre n si la fonction $u \to g(x) = f(x_0 + x)$ admet un D.L d'ordre n au voisinage de 0.

On aura alors

$$g(x) = a_0 + a_1 u + ... + a_n u^n + o(u^n)$$

Que l'on peut encore écrire

$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$ Se ramène donc du voisinage de x_0 à celui de 0 en posant $x - x_0 = u$ ou encore $x = u + x_0$

Exemple :

D.L d'ordre n de e^x au voisinage de $x_0 = 1$ on se ramène au D.L de e^x au voisinage de 0 en posant $u = x - 1$

$$e^x = e^{u+1} = e.e^u = e\left[1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + ... + \frac{u^n}{n!} + o(x^n)\right]$$ Soit

$$e^x = e\left[1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + ... + \frac{(x-1)^n}{n!} + o((x-1)^n)\right]$$ au voisinage de 1.

Exemple :

Donner le D.L à l'ordre 2 au voisinage de 1 de $f(x) = \frac{Log\ x}{x^2 - 1}$

Réponse :

$$D_f = IR_+^* - \{1\}$$

Posons u = x – 1 ou encore x = u + 1

Lorsque x est voisinage de 1, u est voisinage de 0, donc on a

$$\frac{Log(1+x)}{u(2+u)} = \frac{1}{2u}\left(Log(1+u)\right)\left(\frac{1}{1+\left(\frac{u}{2}\right)}\right)$$

$$\frac{Log(1+x)}{u(2+u)} = \frac{1}{2u}\left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)\right)\left(1 - \frac{u}{2} + (\frac{u}{2})^2 - (\frac{u}{2})^3 + o(u^3)\right)$$

$$= \frac{1}{2u}\left[u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{4} + \frac{u^3}{4} + o(u^3)\right]$$

$$= \frac{1}{2u}\left[u - u^2 + \frac{5}{6}u^3 + o(u^3)\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{u}{2} + \frac{5}{12}u^2 + o(u^2)$$ au voisinage de 0.

Reste à repasser en *x* :

$$\frac{Logx}{x^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{(x-1)}{2} + \frac{5}{12}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$ au voisinage de 1.

Remarque :

De la même manière, on peut considérer le D.L de f au voisinage de l'infini, qu'on ramènera au voisinage de 0 par le changement de variable $t = \frac{1}{x}$