Compléments du cours, le calcule de la dernière intégrale du chapitre 6 (voir cours)

$$A = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x \log x \,dx$$

Par parties :

on pose $u(x) = \log x$ et $v'(x) = x$

$\Rightarrow$ $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{x^2}{2}$

$$A = \underbrace{\left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_0^1}_{0} - \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx$$

$= -\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}$ (aire algébrique négative car la courbe de f est au dessous de l'axe des x)

$$A(k) = \int_0^k f(x)\,dx = \int_0^k x \log x$$

d'après 4°) $A(k) = \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_0^k - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^k$

$A(k) = \left(\frac{k^2}{2}\log k\right) - \frac{k^2}{4} = \frac{k^2}{4}\left(-\frac{1}{2} + \log k\right)$

$A(k) = 0 \Leftrightarrow \log k = \frac{1}{2}$ car $k > 1$

$\Rightarrow k = e^{1/2} = \sqrt{e}$.

Calcul Intégral

Ex. 1 : [redacted] Exercice I page 142 du livre "Analyse Mathématique, Tome 1",

Calculer les intégrales définies suivantes :

1) $$I_1 = \int_1^e x^4 \log x \, dx$$

2) $$I_2 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \, dx.$$

Solution :

1) Par parties ;

on pose $u = \log x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$

$v' = x^4 \Rightarrow v = \frac{1}{5}x^5$

$$I_1 = [uv]_1^e - \int_1^e u'v$$

$$= \left[\frac{x^5}{5}\log x\right]_1^e - \frac{1}{5}\int_1^e \frac{x^5}{x}dx = \frac{e^5}{5} - \frac{1}{25}(e^5 - 1)$$

d'où $$\boxed{I_1 = \frac{4e^5+1}{25}}$$

2) Faisons le changement de variable $u = \sqrt{x^2+1}$

$$du = \frac{2x\,dx}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

si $x = 0$ alors $u = 1$

si $x = 1$ alors $u = \sqrt{2}$

donc $\boxed{I_2 = \int_1^{\sqrt{2}} du = \sqrt{2} - 1}$

x Ex. 2 : Exercice VI, page 143 du même livre

* Calculer l'intégrale définie :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{x}{1-x^2}\,dx \quad \text{avec} \quad f(x) = \frac{x}{1-x^2}, \quad 1 < a < b$$

* Calculer l'aire $A(X)$ délimitée par la courbe représentative de f ; (C), l'axe Ox et les droites d'équations $x = 2$ et $x = X$ (avec $X > 2$).

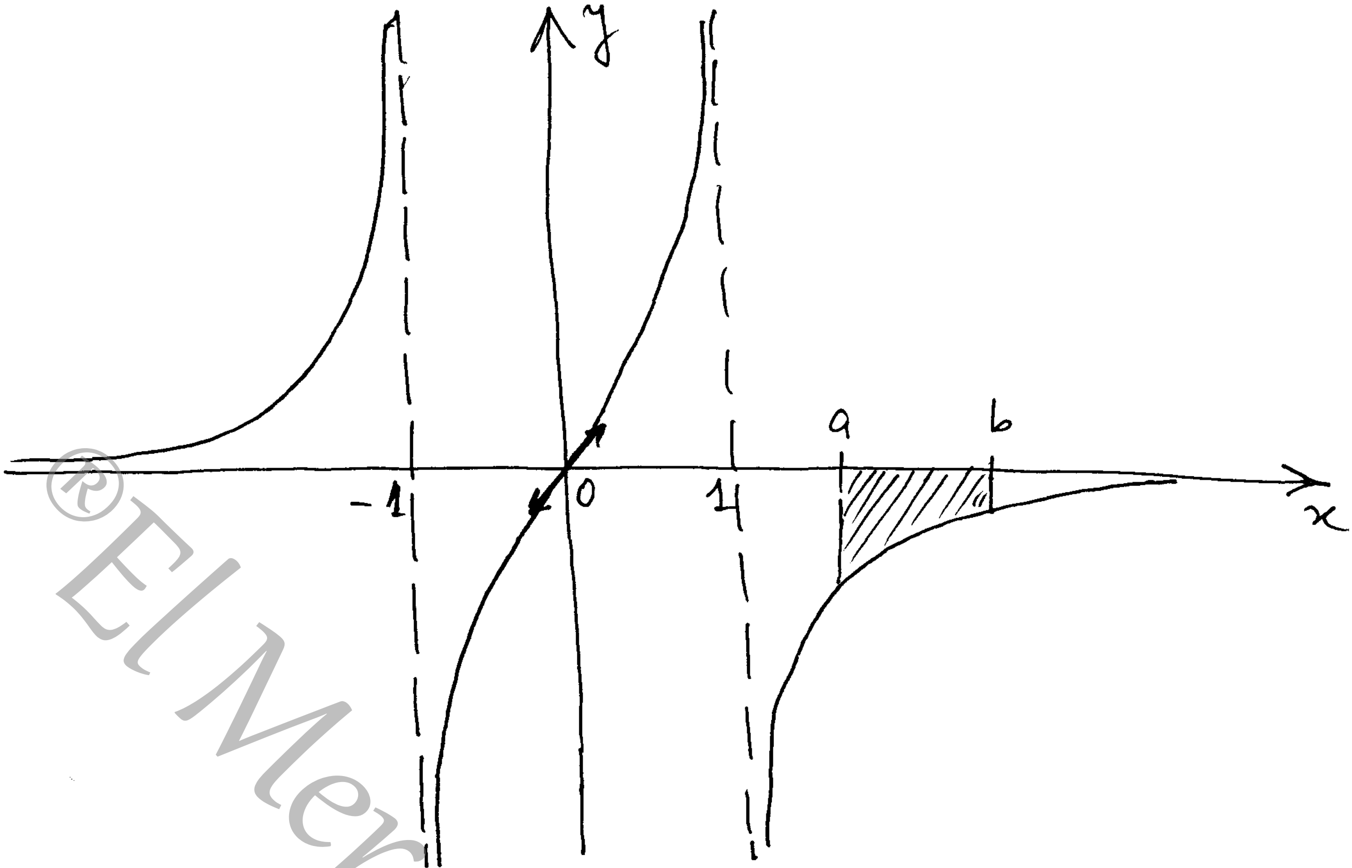
* Quelle est la limite de $A(X)$ lorsque $X \to +\infty$?

Solution :

On rappelle que $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$

On veut calculer $A = \int_a^b f(x)\,dx$ avec $1 < a < b$

qu'on peut voir sur le graphe



donc A est une aire algébrique (négative)

$$A = \int_a^b \frac{x}{1-x^2}\,dx \qquad \text{donc} \quad 1 < a < x < b$$

donc $1 - x^2 < 0$

et $x^2 - 1 > 0$

d'où $$A = -\int_a^b \frac{x}{x^2-1}\,dx$$

on pose $u = x^2 - 1$ alors $du = 2x\,dx$

si $x = a$ $\quad u = a^2 - 1$

$x = b$ $\quad u = b^2 - 1$

$$A = -\frac{1}{2}\int_{a^2-1}^{b^2-1} \frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\Big[\log u\Big]_{a^2-1}^{b^2-1}$$

$$A = -\frac{1}{2}\Big(\log(b^2-1) - \log(a^2-1)\Big) = -\frac{1}{2}\log\frac{b^2-1}{a^2-1}$$

donc

$$A(X) = \int_2^X f(x)\,dx = \int_2^X \frac{x}{1-x^2}\,dx$$

* $A(X) = -\frac{1}{2}\log\frac{X^2-1}{3}$ car ici $a=2$ et $b=X$

* $\boxed{\lim_{X\to+\infty} A(X) = -\infty}$

Exercice II, page 142

Calculer les intégrales suivantes en utilisant l'intégration par parties :

a) $I = \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2}\,dx$ b) $I = \int_{-\infty}^{0} x\,(e^x)^2\,dx$

Solution :

a) On pose $I(\alpha) = \int_1^{\alpha} \frac{\log x}{x^2}\,dx$

Soit $\begin{cases} u(x) = \log x \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$

donc $I(\alpha) = \left[-\frac{\log x}{x}\right]_1^{\alpha} + \int_1^{\alpha} \frac{1}{x^2}\,dx$

$$I(\alpha) = -\frac{\log\alpha}{\alpha} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\alpha} = -\frac{\log\alpha}{\alpha} + \left(-\frac{1}{\alpha}+1\right)$$

Alors $I = \lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha) = 1$ car $\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\log\alpha}{\alpha} = 0$

b) On pose $I(\beta) = \int_{\beta}^{0} x\,(e^{x})^{2}\,dx$

et $\left.\begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = (e^{x})^{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array}\right.$

Alors $I(\beta) = \left[\frac{x}{2} e^{2x}\right]_{\beta}^{0} - \frac{1}{2}\int_{\beta}^{0} e^{2x}\,dx$

$I(\beta) = -\frac{\beta}{2} e^{2\beta} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} e^{2x}\right]_{\beta}^{0}$

$I(\beta) = -\frac{\beta}{2} e^{2\beta} - \frac{1}{4}\left(1 - e^{2\beta}\right)$

On rappelle les limites suivantes :

$\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$; $\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} x\,e^{x} = 0$; $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$

Donc $I = \lim_{\beta\to-\infty} I(\beta) = -\frac{1}{4}$

Exercice III page 142 : ~~Ex 4 :~~ Calculer les intégrales suivantes en utilisant un changement de variables :

a) $I = \int_{1}^{e} \frac{\log x}{x\log x + x}\,dx$

b) $I' = \int_{1}^{e} \frac{1}{x}\sqrt{1+\log x}\,dx$

Solution

a) Soit le changement de variable suivant : $u = \log x$

alors $du = \frac{dx}{x}$ ou encore $dx = x\,du$

si $x = 1$ alors $u = \log 1 = 0$

si $x = e$ alors $u = \log e = 1$

$$I = \int_0^1 \frac{u\,x\,du}{xu + x} = \int_0^1 \frac{u}{u+1}\,du$$

$$= \int_0^1 \frac{u+1-1}{u+1}\,du = \int_0^1 du - \int_0^1 \frac{1}{u+1}\,du$$

$$= 1 - \left[\log(u+1)\right]_0^1 = 1 - (\log 2 - \log 1)$$

$$\boxed{I = 1 - \log 2}$$

b) Soit le changement de variable suivant : $u = 1 + \log x$

alors $du = \frac{dx}{x}$

si $x = 1$ alors $u = 1$

si $x = e$ alors $u = 2$

$$I = \int_1^2 \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_1^2 = \frac{2}{3}\left[\sqrt{2^3} - 1\right] = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

Exercice IV, page 142 ~~Ex 3~~

Calculer les intégrales suivantes :

a) $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{2x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1}\,dx$; b) $I = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(t-1)^2(t-2)}$

" c) voir page 8 "

Solution !

a) $$I = \int_0^2 \frac{2x^2+2}{x^2+1}\,dx + \int_0^2 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= 2\int_0^2 \frac{x^2+1}{x^2+1}\,dx + \Big[\log(x^2+1)\Big]_0^2$$

$$= 2\int_0^2 dx + (\log 5 - \log 1)$$

$$= 2\times(2-0) + (\log 5) = 4 + \log 5 .$$

b) Soit $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{1}{(t-1)^2(t-2)}$ est une fraction rationnelle qu'on va décomposer en éléments simples pour pouvoir l'intégrer.

On est dans le cas $\deg P < \deg Q$

d'où il n'y aura pas de partie polynomiale dans la décomposition et il y aura seulement des éléments de $1^{ère}$ espèce

soit

$$\frac{1}{(t-1)^2(t-2)} = \frac{a}{t-2} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{(t-1)^2}$$

, Multiplions les deux membres par $t-2$, on obtient

$$\frac{1}{(t-1)^2} = a + \frac{b(t-2)}{(t-1)} + \frac{c(t-2)}{(t-1)^2}$$

Remplaçons ensuite t par 2, on obtient $\boxed{a = 1}$

, Multiplions les deux membres par $t-1$, on obtient

$$\frac{1}{(t-1)(t-2)} = \frac{t-1}{t-2} + b + \frac{c}{t-1}$$

Remplaçons ensuite t par 0, on obtient

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + b + (-c) \Rightarrow \boxed{b = c}$$

, Multiplions les deux membres par $(t-1)^2$, on obtient

$$\frac{1}{t-2} = \frac{(t-1)^2}{t-2} + b(t-1) + c$$

Remplaçons ensuite t par 1, on obtient $c = -1$

alors $b = -1$

et $\displaystyle \frac{1}{(t-1)^2(t-2)} = \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1} - \frac{1}{(t-1)^2}$

donc $\displaystyle I = \int_0^x \frac{dt}{t-2} - \int_0^x \frac{dt}{t-1} - \int_0^x \frac{dt}{(t-1)^2}$

$$I = \Big[\log|t-2|\Big]_0^x - \Big[\log|t-1|\Big]_0^x - \Big[\frac{-1}{t-1}\Big]_0^x$$

$$I = \Big[\log\left|\frac{t-2}{t-1}\right|\Big]_0^x + \Big[\frac{1}{t-1}\Big]_0^x = \log\left|\frac{x-2}{x-1}\right| - \log 2 + \frac{1}{x-1} + 1$$

$$\boxed{I = \log\left|\frac{x-2}{2(x-1)}\right| + \frac{1}{x-1} + 1}$$

Exercice IV page 143, 3) Ex 3 (suite)

$$I = \int \frac{2x^4+1}{x^5+x^4+x^3}\,dx$$

Solution : (c) Le dénominateur est un polynôme $Q(x) = x^5+x^4+x^3$ qu'on peut factoriser ainsi $Q(x) = x^3(x^2+x+1)$ avec $x^2+x+1 \neq 0$ toujours dans $\mathbb{R}$ car $\Delta = 1^2-4 = -3 < 0$, donc Q a une seule racine triple $x=0$.

$P(x) = 2x^4+1$

$\deg Q = 5$ et $\deg P = 4$ on a : $\deg P < \deg Q$

Donc il n'y aura pas de partie polynomiale dans la décomposition de $\dfrac{2x^4+1}{x^3(x^2+x+1)} = \dfrac{c}{x} + \dfrac{d}{x^2} + \dfrac{e}{x^3} + \dfrac{ax+b}{x^2+x+1}$

$$\frac{2x^4+1}{x^3(x^2+x+1)} = \frac{cx^2(x^2+x+1)+dx(x^2+x+1)+e(x^2+x+1)+(ax+b)x^3}{x^3(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{c(x^4+x^3+x^2)+d(x^3+x^2+x)+e(x^2+x+1)+(ax^4+bx^3)}{x^3(x^2+x+1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c+a=2 \\ c+d+b=0 \\ c+d+e=0 \\ d+e=0 \\ e=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=0 \\ d=-1 \\ e=1 \end{cases}$$

donc $\dfrac{2x^4+1}{x^3(x^2+x+1)} = \dfrac{-1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

d'où $$\int \frac{2x^4+1}{x^5+x^4+x^3}\,dx = \int -\frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x^3}\,dx + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + C$$

C est une constante

$$\boxed{\int \frac{2x^4+1}{x^5+x^4+x^3}\,dx = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \log\left(x^2+x+1\right) + C}$$