6) Applications des D.L :

a) Recherche d'équivalent d'une fonction :

Si l'on supprime dans les D.L le dernier terme (du type $x^n\varepsilon(x) = o(x^n)$), on obtient un équivalant de la fonction concernée au voisinage de 0.

Exemple :

Cherchons un équivalent de $f(x) = \text{Log}(1+x)$ au voisinage de 0.

D'après de D.L de $x \mapsto Log(1+x)$ On a :

$Log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ au voisinage de 0 ; ou encore :

$Log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

Alors

$$Log(1+x) \underset{0}{\sim} x - \frac{x^2}{2}$$

En effet :

$$\frac{Log(1+x)}{x - \frac{x^2}{2}} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)}{x - \frac{x^2}{2}}$$

$$= 1 + \frac{x^2\varepsilon(x)}{x - \frac{x^2}{2}}$$

$$= 1 + \frac{x\varepsilon(x)}{1 - \frac{x}{2}}$$

D'où $$\lim_{x\to 0} \frac{Log(1+x)}{x - \frac{x^2}{2}} = 1$$

b) Calculs de limites :

Les D.L servent à calculer certaines limites que l'on ne pourrait pas déterminer par les méthodes habituelles.

Exemple :

Calculez $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{Log\ (1+x)-x}{x^2}$

C'est une forme indéterminée $(\dfrac{0}{0})$

Alors on utilise les D.L au voisinage de 0, on a

$$\frac{Log\,(1+x)-x}{x^2} = \frac{\left[x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)\right]-x}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{x^2}+\frac{x}{3}+o(x) \qquad \text{(D.L, ordre 1, vers 0)}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Log(1+x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{3}+o(x)\right) = -\dfrac{1}{2}$

C) Etude de la continuité ou de la dérivabilité en un point :

Exemple :

Soit $g : IR^+ \to IR$

$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ Log\ x}{x-1} & \text{si } x \in IR_+^* - \{1\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Etudier la continuité et la dérivabilité de g au point 1

Continuité :

g est continue en un point x_0 si seulement si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$

On a : g (1) = 1 calculons $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$

Cherchons, donc, le D.L de g au voisinage de 1

Posons $u = x - 1$ ou encore $x = u + 1$

$$g(x)=\frac{x\,Log\,x}{x-1}=\frac{(1+u)Log(1+u)}{u}$$

Lorsque x est voisinage de 1, u est voisinage de 0, on a :

$$\frac{(1+u)Log(1+u)}{u}=\frac{(1+u)\left[u-\frac{u^2}{2}+o(u^2)\right]}{u}$$

$$=\frac{u-\frac{u^2}{2}+u^2+o(u^2)}{u}$$

$$=\frac{u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)}{u}=1+\frac{u}{2}+o(u)$$ au voisinage de 0.

Revenons à x,

$$g(x)=\frac{xLogx}{x-1}=1+\frac{(1-x)}{2}+o(x-1)$$ au voisinage de 1.

D'où

$$\lim_{x\to 1} g(x)=1=g(1)$$ Par suite : **<u>g est continue en 1</u>**

Dérivabilité :

g est dérivable en un point x_0 si seulement si $\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ existe et on a :

$$g'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1+\frac{(x-1)}{2}+o(x-1)-1}{x-1}$$

$$=\frac{1}{2}+o(1)$$

Donc $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{g(x) - g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{2} + o(1) = \dfrac{1}{2}$

D'où g est dérivable en 1 et $g'(1) = \dfrac{1}{2}$.

D) Etude des branches infinies :

Exemple :

Soit $f : \left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;+\infty\right[\to IR$

$$x \mapsto f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

Montrons que la courbe représentative de *f* admet une asymptote oblique (quand $x \to \pm\infty$) et précisons sa position relative par rapport à cette asymptote.

Posons $t = \dfrac{1}{x}$ ou encore $x = \dfrac{1}{t}$

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{\frac{1}{t} - 1}{\frac{1}{t} + 1}} = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$$

Lorsque x est voisin de $\pm\infty$, $t = \dfrac{1}{x}$ est voisin de 0, donc :

$$\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = \frac{1}{t}\sqrt{(1-t)\left(\frac{1}{1+t}\right)} = \frac{1}{t}\sqrt{(1-t)\underbrace{\left(1-t+t^2+o(t^2)\right)}_{\text{D.L ordre 2 de } \frac{1}{1+t}}}$$

$$= \frac{1}{t}\sqrt{1-t+t^2-t+t^2+o(t^2)}$$

$$\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = \frac{1}{t}\sqrt{1-2t+2t^2+o(t^2)} = \frac{1}{t}\sqrt{1+\underbrace{\left(-2t+2t^2+o(t^2)\right)}_{\text{(u voisin de 0 pour t voisin de 0)}}} = \frac{1}{t}\sqrt{1+u}$$

$$= \frac{1}{t}\Bigg[\underbrace{1 + \frac{1}{2}u - \frac{1\times 1}{2\times 4}u^2 + o(u^2)}_{\text{D.L de } \sqrt{1+u} \text{ à l'ordre 2 au voisinage de 0}}\Bigg]$$

$$= \frac{1}{t}\left[1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)\right]$$

$$= \frac{1}{t}\left[1 + \frac{1}{2}\left(-2t + 2t^2 + o(t^2)\right) - \frac{1}{8}\left(-2t + 2t^2 + o(t^2)\right)^2 + o(t^2)\right]$$

$$= \frac{1}{t}\left[1 - t + t^2 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)\right]$$

$$= \frac{1}{t}\left[1 - t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)\right] = \frac{1}{t} - 1 + \frac{t}{2} + o(t)$$ au voisinage de 0.

Revenons à x,

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = \frac{1}{t} - 1 + \frac{t}{2} + o(t)$$

$$= x - 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$ (t voisin de 0 ; x voisin de $\pm\infty$)

Ainsi : $$f(x) = x - 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$ au voisinage de $\pm\infty$

Par suite :

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} 0^+ \; vers \;\; +\infty \\ 0^- \; vers \;\; -\infty \end{cases}$$

Conclusion :

La courbe représentative de *f* admet la droite d'équation $y = x - 1$ comme asymptote oblique vers $\pm\infty$.

Cette courbe est au-dessus de son asymptote vers $+\infty$ et elle est au-dessous de son asymptote vers $-\infty$.