Corrections du Contrôle Continue n°2 de Maths II

Exercice 1 :

$*\quad A = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \int_0^1 e^{-t}\,dt + \int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$

$$\int_0^1 e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^1 = \left(-e^{-1} - 1\right) = 1 - \frac{1}{e}$$

$\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ impropre en $+\infty$, montrons qu'elle est convergente :

on a : $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x e^{-t}\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[-e^{-t}\right]_1^x$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-e^{-x} + e^{-1}\right) = \frac{1}{e}$$

d'où A est convergente et sa valeur est 1.

$*\quad B = \int_0^{+\infty} e^{-(t^2+t)}\,dt$

Soit $t > 0$ alors $t^2 > 0$

donc $-t^2 < 0$ d'où $-t^2 - t < -t$

exp fonction croissante et positive, donc $0 < e^{-t^2-t} < e^{-t}$ $\forall t$

et on sait que $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = A$ (précédente) converge

alors $\int_0^{+\infty} e^{-t^2-t}\,dt$ converge par le critère de majoration pour des fonctions positives.

Exercice 2 :

1) Pour $x \neq 0$, f est continue et dérivable comme quotient des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1 + e^{1/x}$ qui sont des fonctions continues ~~sur~~ et dérivables sur $\mathbb{R}^*$;
La fonction $x \mapsto 1 + e^{1/x}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ du fait que $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto e^{x}$ le sont sur $\mathbb{R}^*$ et ~~pa~~ la composée de deux fonctions continues et dérivables est aussi continue et dérivable.

Pour $x = 0$,

* On a : $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$

donc f est continue en 0.

* $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = 1$, donc f dérivable à gauche de 0 et la dérivée de f à gauche en 0 vaut 1.

* et $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$, donc f est dérivable à droite de 0 et la dérivée ~~à droite de~~ de f à droite de 0 est égale à 0.

2) On a : pour $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{(1+e^{1/x}) - x\left(-\frac{1}{x^2}e^{1/x}\right)}{(1+e^{1/x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{1+e^{1/x}+\frac{1}{x}e^{1/x}}{(1+e^{1/x})^2} = \frac{1+e^{1/x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{(1+e^{1/x})^2}$$

Le signe de la dérivée $f'(x)$ est celui du numérateur :

$$N(x) = 1 + e^{1/x}\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

La fonction N est continue et dérivable sauf pour $x=0$ et :

$$N'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x}\,\frac{2x+1}{x}$$

$N'(x)$ est du signe du trinôme $-x(2x+1)$ et on en déduit les variations de N :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
N		$\searrow$	$1-e^{-2}$	$\nearrow$	$\|\|$	$\searrow$	2

Dans les deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ où N est continue, ses minimums $1-e^{-2}$ et 2 sont > 0 ; $N(x)$ est donc strictement positif quel que soit x.

D'où la dérivée f' est positive

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3°) Posons $u = \frac{1}{x}$ i.e. $x = \frac{1}{u}$

alors $f(x) = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{1+e^u} = \frac{1}{u + u e^u}$

lorsque x est voisin de $\pm\infty$, $u = \frac{1}{x}$ est voisin de 0

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + o(u^3)$$

$$1 + e^u = 2 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$$

$$= 2\Big(1 + \underbrace{\frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{u^3}{12} + o(u^3)}_{\text{on pose } = U}\Big)$$

pour u voisin de 0, U est voisin de 0.

donc $\frac{1}{1+e^u} = \frac{1}{2}\left(1 - U + U^2 - U^3 + o(U^3)\right)$

$$\frac{1}{1+e^u} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{u}{2} - \frac{u^2}{4} - \frac{u^3}{12} + \left(\frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{u^3}{12}\right)^2 + \right.$$

$$\left. - \left(\frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} + \frac{u^3}{12}\right)^3 + o(u^3)\right]$$

$$\frac{1}{1+e^u} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{u}{2} - \frac{u^2}{4} - \frac{u^3}{12} + \frac{u^2}{4} + 2\frac{u^3}{8} - \frac{u^3}{8} + o(u^3)\right]$$

$$\frac{1}{1+e^u} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{u}{2} - \frac{u^3}{12} + \frac{u^3}{8} + o(u^3)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{u}{2} + \frac{u^3}{24} + o(u^3)\right]$$

Revenons à x,

$$\frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{24x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{48x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Alors

$$f(x) = \frac{x}{1+e^{1/x}} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{48x^3} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$ au voisinage de $\pm\infty$

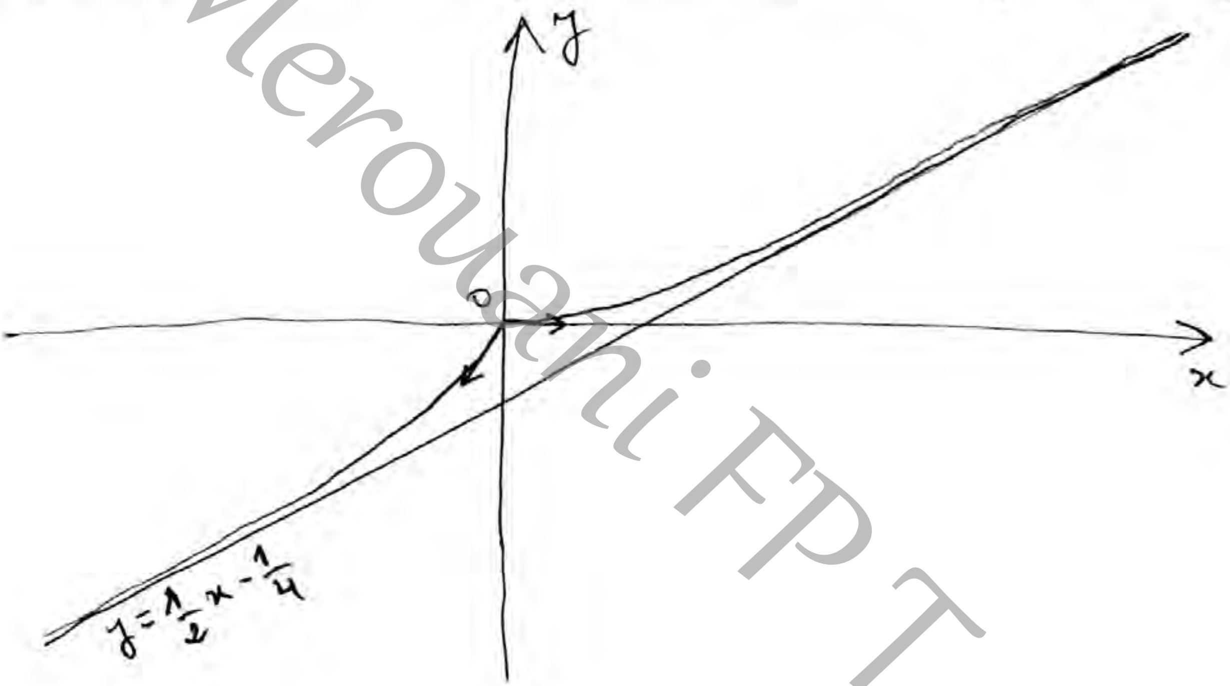
(On pourrait aussi faire la division selon les puissances croissantes de 1 par le polynôme $2 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6}$)

4°) La droite d'équation $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ est asymptote au graphe de f et est au dessous du graphe puisque la différence :

$$f(x) - y = \frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{48} + o(1)\right]$$

est positive pour les valeurs suffisamment petites de $\frac{1}{x}$.

A l'origine, les valeurs des dérivées à droite et à gauche ($f'(0^+) = 0$ et $f'(0^-) = 1$) donnent les pentes des demi-tangentes du graphe.



Exercice n° 3 :

$$\begin{cases} U_n = \frac{1}{2}\left(U_{n-1} + \frac{1}{U_{n-1}}\right) & \text{pour } n > 1 \\ U_1 > 0 \end{cases}$$

1°/ $U_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$?

Par hypothèse on a : $U_1 > 0$

$$U_2 = \frac{1}{2}\left(U_1 + \frac{1}{U_1}\right) > 0 \quad (\text{somme de nombres} > 0)$$

On suppose que $U_n > 0$; il est alors évident que l'on a

$$U_{n+1} > 0.$$

Donc $U_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

2°/ Montrons que (U_n) est "décroissante" pour $n \geqslant 2$ et "minorée"

Considérons la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$

alors $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{x^2 - 1}{x^2}$

d'où les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

pour $x > 0$, on a donc $f(x) \geqslant 1$.

Donc, pour $n \geqslant 2$; on a : $U_n \geqslant 1$

D'autre part : $\frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{U_{n-1}^2}\right)$

pour $n \geqslant 3$, on a $\frac{U_n}{U_{n-1}} \leqslant 1$

La suite $(U_n)_{n \geqslant 3}$ est donc décroissante.

Elle est minorée par 1.

3°/ Pourquoi est-elle convergente ? Quelle est sa limite ?

Décroissante et minorée, la suite converge.

Soit l sa limite, lorsque $n \to +\infty$, $U_n \to l$ et $U_{n-1} \to l$

l doit donc vérifier l'équation :

$$l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{1}{l}\right) \text{ soit } l^2 - 1 = 0$$

$$\text{soit } l = \pm 1$$

-1 ne peut convenir puisque la suite est minorée par 0.

On a donc $\boxed{l = +1}$.