Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences Juridiques, Economiques et Sociales
-Tanger-
Annexe Tétouan

Année Universitaire : 2004/2005
Filière : Sc. Economiques & Gestion
Module : Méthodes Quantitatives II
Semestre : Troisième
Enseignant : M. EL MEROUANI.

Rattrapage
de Mathématiques II
Durée : 1 heure

Exercice n°1 : **(8 points)**

1. Etudier la nature de la suite définie par la relation de récurrence :

4 $$\forall n \in IN^* \; ; \; U_n = \frac{U_{n-1}}{1+3U_{n-1}} \text{ et } U_0 = 1 .$$

2. Déterminer en fonction de n l'expression de $V_n = \frac{1}{U_n}$ et en

4 déduire celle de U_n .

Exercice n°2 : **(12 points)**

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{Log\,(1+x)}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 1 \quad si \quad x = 0 \end{cases}$$

4 **1.** Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro.

4 2. Montrer que f est continue et dérivable en 0.
Que vaut la dérivée de f en zéro ?

4 3. f est-elle de classe C^1 sur IR ?

On donne les développement limité à l'ordre n de :

$$Log\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

au voisinage de zéro.

Correction du Contrôle de rattrapage de Mathématiques II

Exercice n°1 :

1°) • on a : $U_0 = 1 > 0$

Supposons que $U_n > 0$ (Hypothèse de récurrence)

alors $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+3U_n} > 0$ aussi

donc $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n > 0$ (1 points)

• $U_n - U_{n-1} = \dfrac{U_{n-1}}{1+3U_{n-1}} - U_{n-1}$

$= - \dfrac{3U_{n-1}^2}{1+3U_{n-1}} < 0$

donc (U_n) est décroissante. (2 points)

• On a : (U_n) décroissante et minorée par zéro d'où elle est convergente.

sa limite $\ell \geq 0$ telle que $\ell = \dfrac{\ell}{1+3\ell}$

donc $\ell = 0$ (1 point)

2°) $V_n = \dfrac{1+3U_{n-1}}{U_{n-1}} = \dfrac{1}{U_{n-1}} + 3 = V_{n-1} + 3$

donc (V_n) est une suite arithmétique de raison 3.

Alors d'après l'écriture d'une suite arithmétique

on a : $V_n = 3n+1$ (2 points)

d'où $U_n = \dfrac{1}{3n+1}$ (2 points)

Exercice n° 2 :

si $x \neq 0$; $f(x) = \dfrac{\text{Log}(1+x)}{x}$

1°) Au voisinage de 0, on a :

$$\text{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

donc $\boxed{\dfrac{\text{Log}(1+x)}{x} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + o(x^2)}$

au voisinage de zéro. (4 points)

2°) * f est continue en 0 ssi $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}\left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right] = 1 = f(0).$$

(2 points)

* f est dérivable en 0 ssi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ existe

et finie ; alors on aura $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right] - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0}\left[-\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + o(x)\right] = -\frac{1}{2}$$

(2 points)

3°) Les fonctions $x \longmapsto \text{Log}(1+x)$ et $x \longmapsto \frac{1}{x}$ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{1+x} - \log(1+x)\right)$$

(1,5 points)

En 0, effectuons un D.L.

$$\frac{x}{1+x} = x\left(1 - x + x^2 + o(x^2)\right) = x - x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$\text{Log}(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

d'où $$f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(\cancel{x} - x^2 + x^3 - \cancel{x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}x + o(x)$$ (1,5 points)

donc $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\frac{1}{2} = f'(0)$, c'est-à-dire la dérivée est continue en 0. (1 point)

<u>Conclusion</u> : f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 1 :

1°) Autre méthode :

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente de la forme $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

avec $f(x) = \dfrac{x}{1+3x}$

Etudions f ; $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

Comme on a vu que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $U_n > 0$, on se contente donc d'étudier f sur $\mathbb{R}^+$

$$f'(x) = \frac{(1+3x) - 3x}{(1+3x)^2} = \frac{1}{(1+3x)^2} > 0 \;;\; \forall x \in \mathbb{R}^+$$

D'où

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc (U_n) est monotone. Comme $U_1 = \dfrac{U_0}{1+3U_0}$

$$U_1 = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4} < U_0 = 1$$

(2 points)

d'où (U_n) est décroissante.