Correction des exercices de la page 28 et 29 du livre

Prof. Mohamed El Merouani

®El Merouani.FP Tetouan

I.- Domaine de définition et étude de la parité des fonctions suivantes :

1.
$$f(x)=\frac{\text{tg }x}{1-x}$$
$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 1 \quad \text{et} \quad x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \text{avec} \quad k\in\mathbb{Z}\}$$
$$D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[-\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$$
$$f(-x)=\frac{\text{tg}(-x)}{1+x}=\frac{-\text{tg }x}{1+x}$$

f n'est ni paire ni impaire.

2.
$$f(x)=\frac{\text{tg }x-x}{x^3\cos x}$$
$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 0 \quad \text{et} \quad x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \text{avec} \quad k\in\mathbb{Z}\}$$
$$D_f=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[-\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$$
$$f(-x)=\frac{\text{tg}(-x)+x}{(-x)^3\cos(-x)}=\frac{-\text{tg}(x)+x}{-x^3\cos x}=\frac{\text{tg}(x)-x}{x^3\cos x}=f(x)$$

Donc f est une fonction paire.

3.
$$f(x)=\sin(x^2)$$
$$D_f=\mathbb{R}$$
$$f(-x)=\sin((-x)^2)=\sin(x^2)=f(x)$$

Donc f est paire.

4.
$$f(x)=\cos(x^3)$$
$$D_f=\mathbb{R}$$
$$f(-x)=\cos((-x)^3)=\cos(-x^3)=\cos(x^3)=f(x)$$

f est une fonction paire.

5.

$$f(x) = \text{Log}\left(\frac{1+x}{1+x}\right)$$

Pour que f soit bien définie, il faut que $\frac{1+x}{1+x} > 0$ et $x \neq 1$.
Donc $D_f =]-1, 1[$

$$f(-x) = \text{Log}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \text{Log}(1-x) - \text{Log}(1+x) = -(\text{Log}(1+x) - \text{Log}(1-x))$$

$$= -\text{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$$

Donc f est impaire.

6.

$$f(x) = \text{Log}\left(\frac{1+x^2}{1-x}\right)$$

$$D_f =]-\infty, 1[$$

$$f(-x) = \text{Log}\left(\frac{1+(-x)^2}{1+x}\right) = \text{Log}\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)$$

f n'est ni paire ni impaire.

II.- Étude ou calcul de limite, dans les cas indiqués, des fonctions suivantes :

1.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1-x}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$$

2.

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^3-3x^2+4} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x-2)^2(x+2)}{(x-2)^2(x+1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x+2}{x+1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^3-3x^2+4} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x+2}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^3-3x^2+4} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x+1} = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^3-3x^2+4} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

3.

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x+3}{x+1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x+3}{x+1} = -\infty$$

<u>Autre méthode :</u>
On a $x^2-2x-3 > 0$ si $x > 3$ ou $x < -1$ et $x^2-2x-3 < 0$ si $x \in]-1, 3[$
donc $\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3} = \frac{-8}{0^-} = +\infty$ et $\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3} = \frac{-8}{0^+} = -\infty$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

®El Merouani. FD Tetouan

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

4.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

5.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{1+x}-1}=+\infty;\qquad \lim_{x\to0^-}\frac{1}{\sqrt{1+x}-1}=-\infty$$

$$(\text{On a}\quad \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}=\frac{\sqrt{1+x}+1}{1+x-1}=\frac{\sqrt{1+x}+1}{x})$$

6.

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+5}-x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}-x$$

$$=\lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}-x$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}-x$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}-1\right)$$

Donc

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+5}-x=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+5}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x+5})^2-x^2}{\sqrt{x^2+2x+5}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{\sqrt{x^2+2x+5}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+5}-x=1$$

7.

$$\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{(1-x)(1+x)}=\frac{1}{1-x}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}=-\infty$$

®El Merouani FP Tetouan

8.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{\sqrt{x+2}+2}\times\frac{\sqrt{x+7}+3}{x+7-9}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2}\times\frac{\sqrt{x+7}+3}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

III.- Calcul des limites suivantes :

1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3+\cos x-4}{x^2(\sqrt{3+\cos x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2(\sqrt{3+\cos x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2}\frac{(1-\cos x)}{\frac{x^2}{2}}\times\frac{1}{\sqrt{3+\cos x}+2}$$
$$=\frac{-1}{8}\quad(\text{car}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1\quad\text{et}\quad\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{3+\cos x}+2}=\frac{1}{4})$$

2. On a

$$0\le\left|\frac{\sin x}{x}\right|\le\frac{1}{x}\forall x\in\mathbb{R}\quad\text{et}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=0\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

3.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{x}=+\infty\ (\text{Car}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\quad\text{et}\quad\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty)$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{x}=-\infty\ (\text{Car}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\quad\text{et}\quad\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty)$$

4.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\times\frac{x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\sqrt{x}=0$$

5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{3x}{\sin 3x}\times\frac{2x}{3x}$$
$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\frac{3x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}$$

IV.- Calcul des limites suivantes :

1.

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)e^{\frac{1}{x^2}}=+\infty\ (\text{Car}\ \lim_{x\to+\infty}x^2+1=+\infty\ \text{et}\ \lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x^2}}=e^0=1)$$

2.

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+3\text{Log}\,x)=+\infty\ (\text{Car}\ \lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty\ \text{et}\ \lim_{x\to+\infty}\text{Log}\,x=+\infty)$$

©El Merouani FP Tetouan

3.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos x \text{Log}(\text{tg } x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos x \text{Log}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos x\,(\text{Log}\sin x - \text{Log}\cos x)$$

$$(\frac{\sin x}{\cos x} > 0 \text{ pour } x \text{ proche de} \frac{\pi}{2} \text{ et } x < \frac{\pi}{2})$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos x\,(1 - \text{Log}(\cos x) + \text{Log}(\sin x) - 1)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos x\,(1 - \text{Log}(\cos x)) + \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\text{Log}(\sin x) - 1)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos x \text{Log}(\text{tg} x) = \lim_{x\to 0^+} X\,(1 - \text{Log} X) + \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\text{Log}\sin x - 1)$$

$$(\text{On prend} \cos x = X,\ \text{donc quand } x \longrightarrow \frac{\pi}{2}^-, X \longrightarrow 0^+)$$

$$X(1 - \text{Log}X) = X - X\text{Log}X$$

$$\text{Comme } \lim_{x\to 0^+} X\text{Log}X = 0, \lim_{X\to 0} X = 0 \text{ et } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \text{Log}\sin x - 1 = \text{Log } 1 - 1 = -1$$

$$\text{alors } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos x \text{Log}(\text{tg} x) = -1$$

V.- Étude des limites des fonctions suivantes en x_0 indiqué :

1. soit f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ \sin x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \cos x = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sin x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

Donc f n'admet pas de limite en $x_0 = 0$.

2. soit f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ \text{Log } x & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \sin(\pi x) = \sin(\pi) = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \text{Log } 1 = 0$$

Donc $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$, par suite $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$.

®El Merouani-FP Tetouan