

*Examen de la Première session (Mai 2001)*  
*1<sup>ère</sup> Année du 1<sup>er</sup> cycle, Section : Sciences Economiques*  
Aucun document n'est autorisé.

**Exercice 1 :**

Résoudre dans  $]-\pi, \pi[$  l'équation  $\sqrt{3} \cos(3x) - \sin(3x) \leq \sqrt{2}$

**Exercice 2 :**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0,1]$  à valeurs dans  $[0,1]$

Montrer qu'il existe  $x_0 \in [0,1]$  tel que  $f(x_0) = x_0$ .

(indication : utiliser la fonction  $g(x) = f(x) - x$ )

**Exercice 3 :**

Déterminer les limites éventuelles :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\frac{1+x}{x^3}}}{\sin \frac{1}{x}} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^{x \ln x}$$
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right)}{\sin x - \cos x} ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{4x^2 - x + 1}$$

**Exercice 4 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-2x}} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = \alpha$$

1°) Quelle valeur faut-il donner à  $\alpha$  pour que  $f$  soit continue en 0 ?

2°) Avec la valeur de  $\alpha$  trouvée ci-dessus,  $f$  est-elle de classe  $C_1(\mathbb{R})$  ?

**Exercice 5 :**

Soit  $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}$

1. Donner  $D_f$ .
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$ .
3. Calculer  $f'$  et donner le tableau de variations de  $f$ .
4. Donner les éventuelles asymptotes de  $f$ .
5. Donner l'équation de la tangente en 0.
6. Donner l'allure de la courbe de  $f$ .