Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire
Tétouan

Année Universitaire : 2007/2008
LF « Sc. Eco. & de Gestion »
2ème Semestre (S2)

Contrôle Final de Mathématiques I
Durée : 2 heures.

4pts

Exercice 1 :

En utilisant la règle de l'Hospital, calculer les limites suivantes :

2 1°) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ 2 2°) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$

4pts

Exercice 2 :

Calculer les intégrales suivantes :

2 1°) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$ 2 2°) $\displaystyle\int_0^1 x\,Log\left(1+x^2\right)dx$

6pts

Exercice 3 :

Soit la suite numérique $(U_n)_{n\in IN}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_n = \dfrac{U_{n-1}}{1+3U_{n-1}} \ ; \forall n \in IN^* \end{cases}$$

1 1°) Montrer que $(U_n)_{n\in IN}$ est décroissante.

1 2°) Montrer que $\forall n \in IN, \quad U_n > 0$.

1 3°) En déduire que $(U_n)_{n\in IN}$ est convergente et déterminer sa limite.

4°) On considère, maintenant, la suite numérique $(V_n)_{n\in IN}$ définie par :

$$V_n = \frac{1}{U_n}; \ \forall n \in IN.$$

1 (a) Montrer que $(V_n)_{n\in IN}$ est une suite arithmétique. Quelle est sa raison ?

1 (b) Déterminer l'expression de V_n en fonction de n.

1 (c) En déduire l'expression de U_n en fonction de n et recalculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

6pts

Exercice 4 :

On considère la fonction réelle f de la variable réelle x définie par $f(x)=\dfrac{1}{x(Log\,x)^2}$.

1 1°) Déterminer D_f le domaine de définition de f.

1 2°) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition D_f.

1 En déduire les asymptotes à la courbe représentative de f.

1 3°) Étudier la continuité et la dérivabilité de f.

1 4°) Donner le tableau de variations de f.

1 5°) Construire la représentation graphique de f.

Correction C.F.
Maths I

2007 - 2008

Exercice 1 :

1) On pose $f(x) = -\sin x + x$

$$g(x) = x^3$$

alors f et g sont deux fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ de dérivées respectives $f'(x) = -\cos x + 1$

et $g'(x) = 3x^2$

D'après la regle de l'Hospital, on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\sin x + x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cos x + 1}{3x^2}$$

$$= + \lim_{x \to 0} \frac{+1 - \cos x}{6 \frac{x^2}{2}} = +\frac{1}{6}$$

2) Posons $u(x) = e^{x^2} - \cos x$

$v(x) = x^2$

Par des théorèmes de continuité et de dérivabilité de fonctions, u et v sont deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$u'(x) = 2x e^{x^2} + \sin x$

$v'(x) = 2x$

Alors, d'après la règle de l'Hospital, on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x e^{x^2} + \sin x}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{x^2} + \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Exercice 2 :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx \Longrightarrow$ décomposition de $\dfrac{x^3}{1+x^2}$ en éléments simples.

Posons $P(x) = x^3$ et $Q(x) = x^2+1$

on a $\deg P = 3 \geqslant \deg Q = 2$

$\Longrightarrow$ il y a une partie entière dans la décomposition de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en éléments simples

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+1 \\ \hline -\ (x^3+x) & x \\ \hline -x & \end{array}$$

donc $E(x) = x$

et $P(x) = E(x)\,Q(x) - x$ ou encore $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = E(x) - \dfrac{x}{Q(x)}$

$Q(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2 = -1$ n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$

d'où $\boxed{\dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}}$

Exercice 2 :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx \Longrightarrow$ décomposition de $\dfrac{x^3}{1+x^2}$ en éléments simples.

Posons $P(x) = x^3$ et $Q(x) = x^2+1$

on a $\deg P = 3 \geqslant \deg Q = 2$

$\Rightarrow$ il y a une partie entière dans la décomposition de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en éléments simples

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -\ \ x^3+x & x \\ \hline -x & \end{array}$$

donc $E(x) = x$

et $P(x) = E(x)\,Q(x) - x$ ou encore $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = E(x) - \dfrac{x}{Q(x)}$

$Q(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2 = -1$ n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$

d'où $\boxed{\dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}}$

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\mathrm{Log}(1+x^2)\right]_0^1$$

$$\boxed{= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2}$$

2°) $\displaystyle\int_0^1 x\log(1+x^2)\,dx$, par parties, on pose

$$u(x) = \log(1+x^2) \Longrightarrow u'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)}$$

$$v'(x) = x \Longrightarrow v(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$\int_0^1 x\log(1+x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\log(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$$

or, d'après 1°) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2$

d'où $\displaystyle\int_0^1 x\log(1+x^2)\,dx = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log 2$

$$\boxed{= (\log 2) - \frac{1}{2}}$$

Exercice 3 :

1°) $(U_n) \searrow$?

$$U_n - U_{n-1} = \frac{U_{n-1}}{1+3U_{n-1}} - U_{n-1}$$

$$= -\frac{3U_{n-1}^2}{1+3U_{n-1}} < 0$$

donc $(U_n) \searrow$ si $U_n > 0 \; ; \forall n \in \mathbb{N}$.

Autre méthode :

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente de la forme $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

avec $f(x) = \dfrac{x}{1+3x}$

Etudions f ; $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

Comme on a vu que $(\forall n \in \mathbb{N})\; U_n > 0$, on se contente donc d'étudier f sur $\mathbb{R}^+$

$$f'(x) = \frac{(1+3x) - 3x}{(1+3x)^2} = \frac{1}{(1+3x)^2} > 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}^+$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$0 \nearrow$	$\frac{1}{3}$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

donc (U_n) est monotone.

Comme $U_1 = \dfrac{U_0}{1+3U_0} = \dfrac{1}{1+3} = \dfrac{1}{4} < U_0 = 1$

d'où (U_n) est décroissante.

2°) on a : $U_0 = 1 > 0$

Supposons que $U_n > 0$ (hypothèse de récurrence)

alors $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+3U_n} > 0$ aussi

donc $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n > 0$

3°) On a : (U_n) décroissante et minorée par zéro

d'où elle est convergente.

Sa limite $l \geq 0$ vérifie $l = \dfrac{l}{1+3l}$

donc $l = 0$

4°) (a) $V_n = \dfrac{1 + 3U_{n-1}}{U_{n-1}} = \dfrac{1}{U_{n-1}} + 3 = V_{n-1} + 3$

donc (V_n) est une suite arithmétique de raison 3

(b) Alors, d'après l'écriture d'une suite arithmétique on a $V_n = 3n + 1$

(c) d'où $U_n = \dfrac{1}{3n+1}$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3n+1} = 0.$$

Exercice 4 :

$$f(x) = \frac{1}{x(\log x)^2}$$

1°) $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

$=]0, 1[\cup]1, +\infty[$

2°) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

~~Asymptotes~~ :

on a : * $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \Longrightarrow$ l'axe des y est asymptote verticale à la courbe de f

* $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty \Longrightarrow$ la droite d'éq. $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe de f.

* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Longrightarrow$ l'axe des x est aussi asymptote horizontale à la courbe de f.

3°) f est continue et dérivable sur son domaine de définition (les théorèmes généraux).

$$f'(x) = \frac{-(\log x + 2)}{x^2 (\mathrm{Log}\, x)^3}$$

4°) Tableau de variations de f :

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{e^2}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0