XVII. – page 60

Considérons la fonction f définie par :

$$f : x \longmapsto \frac{x}{1-x^2}$$

Etudier la variation de f et tracer sa courbe représentative (C)

Solution :

Ensemble de définition :

- $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 - x^2 \neq 0\}$

$1 - x^2 = 0 \iff (1-x)(1+x) = 0 \iff x = 1$ ou $x = -1$

donc $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$

- f est continue et dérivable sur son domaine de définition car f est quotient (rapport) de deux fonctions polynômes (fonctions rationnelles)

- Parité : soit $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$

$$f(-x) = \frac{-x}{1-(-x)^2} = \frac{-x}{1-x^2} = -f(x)$$

donc f est impaire

d'où on peut étudier f sur $D_E = [0, 1[\cup]1, +\infty[$ car sa courbe représentative est symétrique par rapport au centre du repère O

$D_E = [0, 1[\cup]1, +\infty[$; $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$

- $f(0) = \dfrac{0}{1 - 0} = 0$

- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{1 - x^2}$

on a : $\lim\limits_{x \to 1} x = 1$

$\lim\limits_{x \to 1} 1 - x^2 = 0$

donc $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{1 - x^2}$ dépend du signe de $(1 - x^2)$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1 - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (1 - x^2) = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (1 - x^2) = 0^- \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty}$

$\Longrightarrow$ la droite d'éq. $x = 1$ est asymptote de f

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{1 - x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$

$\Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0} \Longrightarrow$ "$y = 0$" asymptote de f

$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$

Limites aux bornes de D_f :

, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1 - x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{x}$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0} \Rightarrow$ la droite d'éq. $y = 0$ asymptote de f

, $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x}{1 - x^2}$

on a : $\lim_{x \to -1} (x) = -1$

et $\lim_{x \to -1} (1 - x^2) = 0$

donc $\lim_{x \to -1} \frac{x}{1 - x^2}$ dépend du signe de $(1 - x^2)$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1 - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -1^-} x = -1 \\ \lim_{x \to -1^-} (1 - x^2) = 0^- \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty}$$

$\Rightarrow$ La droite d'éq : "$x = -1$" asymptote de f.

Re même :

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -1^+} x = -1 \\ \lim_{x \to -1^+} (1 - x^2) = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty}$$

Calcul de la dérivée première de : $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$

$$f'(x) = \frac{(1-x^2) - (-2x).x}{(1-x^2)^2} = \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}} > 0 \quad \forall x \in D_f .$$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$		$+$		$\|\|$	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0

$f(x) = 0 \iff x = 0$

Calcul de la dérivée seconde : on a : $f'(x) = \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{2x(1-x^2)^2 - 2(1-x^2)(-2x)(1+x^2)}{(1-x^2)^4}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{2x(1-x^2) + 4x(1+x^2)}{(1-x^2)^3}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{2x - 2x^3 + 4x + 4x^3}{(1-x^2)^3} = \frac{2x^3+6x}{(1-x^2)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)(1-x^2)^2}$$

$f''(x) = 0 \iff x = 0$

f'' s'annule en 0 en changeant de signe

$\Rightarrow O(0,0)$ point d'inflexion.

		-1		0		1	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$1-x^2$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
f''	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$

$$f'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x(1-x^2)^2 - 2(1-x^2)(-2x)(1+x^2)}{(1-x^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2x(1-x^2) + 4x(1+x^2)}{(1-x^2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{2x - 2x^3 + 4x + 4x^3}{(1-x^2)^3} = \frac{2x^3+6x}{(1-x^2)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)(1-x^2)^2}$$

$$f''(x) = 0 \iff x = 0$$

x		-1		0		$+1$	
$1-x^2$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
f''	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$

$\Rightarrow$ f'' s'annule en 0 en changeant de signe

$\Rightarrow$ $O(0,0)$ point d'inflexion.

<u>Equation de la tangente en $O(0,0)$:</u>

$\Longrightarrow$ La courbe représentative de f admet une tangeante en $M(x_0, f(x_0)) \equiv O(0,0)$ d'équation :

$$y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$$

$$y = f(0) + (x - 0) f'(0)$$

$\Rightarrow y = x$ car $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

Représentation graphique de f :