XIV.— sur $\mathbb{R}$ $\quad f(x) = x|x|$

* Il est clair que f est continue en tout réel non nul

Continuité en 0 : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$

et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$

Ainsi $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$.

ceci montre que f est continue en 0.

* Montrons que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

si $x > 0$; $f(x) = x^2$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

si $x < 0$; $f(x) = -x^2$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$

Puisque f est continue en 0, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

Mais comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

* Etudions la dérivabilité de f ;

Sur $\mathbb{R}_+^*$; $f(x) = x^2$, donc f est dérivable et $f'(x) = 2x$

Sur $\mathbb{R}_-^*$; $f(x) = -x^2$, donc f est dérivable et $f'(x) = -2x$

en 0 ; $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - 0}{x - 0} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x^2 - 0}{x - 0} = 0$

donc f est dérivable en 0 et on a $f'(0) = 0$

D'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$

On a : f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

alors elle admet une bijection réciproque de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

comme f est définie, continue, strictement croissante et dérivable, il en est de même de f^{-1}, elle est définie continue, strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Détermination de f^{-1} :

Soit $y \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(x) = y \Leftrightarrow x.|x| = y$

si $x > 0$; alors aussi $y > 0$ et on a $x^2 = y$

donc $\underline{\underline{x = \sqrt{y}}}$

si $x < 0$; alors aussi $y < 0$ et on a $-x^2 = y$

$$\Rightarrow x^2 = -y$$

$$\Rightarrow |x| = \sqrt{-y}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = -\sqrt{-y}}}$$

Donc pour $x \in \mathbb{R}^*$; $y \in \mathbb{R}^*$ on a : $f(x) = y \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{|y|}{y}\sqrt{|y|}}}$

Alors $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$