Exercice:

Étudier les variations et construire le graphe de la fonction f définie pour $x > 0$ par :

$$f(x) = x^x.$$

® ElMerouani.FP.Tetouan

Solution:

On sait que $f(x) = e^{x \ln x}$.
La fonction f est donc définie continue dérivable pour $x > 0$:

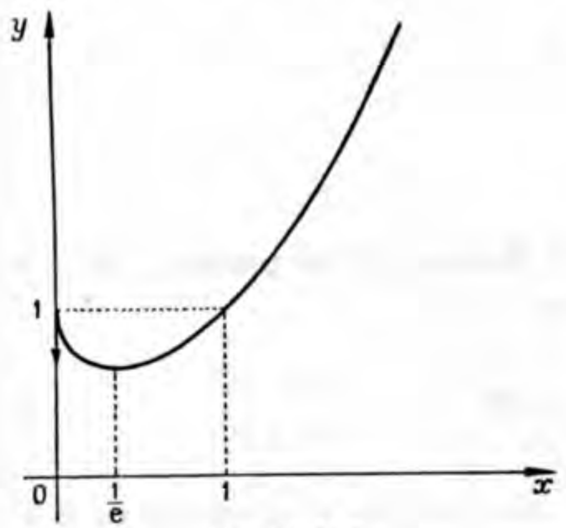
$$f'(x) = e^{x \ln x}(1 + \ln x),$$

$f'(x)$ est du signe de $1 + \ln x$ et donc de $x - 1/e$:

$$x \to 0 \quad \Rightarrow \quad x \ln x \to 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \to 1$$
$$x \to +\infty \Rightarrow x \ln x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$$

x	0		$1/e$		1		$+\infty$
f	1	$\searrow$	$e^{-1/e}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Tangente au point de coordonnées (0, 1) *quand* $x \to 0$:



Graphe de f.

$$\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{e^{x \ln x} - 1}{x} \sim \frac{x \ln x}{x} \to -\infty$$

ou

$$f'(x) = (1 + \ln x) f(x) \to -\infty.$$

L'axe oy est tangent au graphe.

Branche infinie.
Quand $x \to +\infty$,

$$\frac{f(x)}{x} = e^{(x-1)\ln x} \to +\infty.$$

Oy est direction asymptotique; il n'y a pas d'asymptote.