Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire
Tétouan

Année Universitaire : 2007/2008
LF « Sc. Eco. & de Gestion »
2ème Semestre (S2)

## Contrôle Final de Mathématiques I
Durée : 2 heures.



**Exercice 1 :**

En utilisant la règle de l'Hospital, calculer les limites suivantes :

1°) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ 2°) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$

**Exercice 2 :**

Calculer les intégrales suivantes :

1°) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$ 2°) $\displaystyle\int_0^1 x\,Log\left(1+x^2\right)dx$

**Exercice 3 :**

Soit la suite numérique $(U_n)_{n\in IN}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_n = \dfrac{U_{n-1}}{1+3U_{n-1}} \end{cases} ;\ \forall n\in IN^*$$

1°) Montrer que $(U_n)_{n\in IN}$ est décroissante.

2°) Montrer que $\forall n\in IN,\quad U_n>0$.

3°) En déduire que $(U_n)_{n\in IN}$ est convergente et déterminer sa limite.

4°) On considère, maintenant, la suite numérique $(V_n)_{n\in IN}$ définie par :

$$V_n=\frac{1}{U_n};\ \ \forall n\in IN.$$

(a) Montrer que $(V_n)_{n\in IN}$ est une suite arithmétique. Quelle est sa raison ?

(b) Déterminer l'expression de $V_n$ en fonction de $n$.

(c) En déduire l'expression de $U_n$ en fonction de $n$ et recalculer $\lim_{n\to+\infty}U_n$.

**Exercice 4 :**

On considère la fonction réelle $f$ de la variable réelle $x$ définie par $f(x)=\dfrac{1}{x(Log\,x)^2}$.

1°) Déterminer $D_f$ le domaine de définition de $f$.

2°) Calculer les limites de $f$ aux bornes de son domaine de définition $D_f$.

En déduire les asymptotes à la courbe représentative de $f$.

3°) Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$.

4°) Donner le tableau de variations de $f$.

5°) Construire la représentation graphique de $f$.

Exercice 1 :

1) On pose $f(x) = -\sin x + x$

$g(x) = x^3$

Alors $f$ et $g$ sont deux fonctions définies, continues et dérivables sur IR de dérivées respectives $f'(x) = -\cos x + 1$ et $g'(x) = 3x^2$.

D'après la règle de l'Hospital, on a :

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x + x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x + 1}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{6\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{6}.$$

2) Posons $u(x) = e^{x^2} - \cos x$ et $v(x) = x^2$

Par des théorèmes de continuité et de dérivabilité de fonctions, $u$ et $v$ sont deux fonctions continues et dérivables sur IR et on a :

$u'(x) = 2xe^{x^2} + \sin x$

$v'(x) = 2x$

Alors, d'après la règle de l'Hospital, on a :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2} + \sin x}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{x^2} + \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Exercice 2 :

1) $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx \Rightarrow$ décomposition de $\frac{x^3}{1+x^2}$ en éléments simples.

Posons $P(x) = x^3$ et $Q(x) = x^2 + 1$

On a $\deg P = 3 \geq \deg Q = 2 \Rightarrow$ il y a une partie entière dans la décomposition de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en éléments simples.

$$\begin{array}{l|l} x^3 & x^2+1 \\ \underline{x^3+x} & x \\ -x & \end{array}$$

Donc $E(x)=x$ et $P(x)=E(x)Q(x)-x$ ou encore $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = E(x) - \dfrac{x}{Q(x)}$

$Q(x)=0 \Leftrightarrow x^2=-1$ n'a pas de racines dans IR

D'où $\dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}$

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx = \int_0^1 x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[Log\left(1+x^2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}Log\,2$$

2) $\displaystyle\int_0^1 xLog\left(1+x^2\right)dx$, par parties, on pose

$u(x) = Log\left(1+x^2\right) \Rightarrow u'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

$v'(x) = x \Rightarrow v(x) = \dfrac{x^2}{2}$

$\displaystyle\int_0^1 xLog\left(1+x^2\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}Log\left(1+x^2\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$

Or, d'après 1°) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}Log\,2$

D'où $\displaystyle\int_0^1 xLog\left(1+x^2\right)dx = \frac{1}{2}Log\,2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}Log\,2 = (Log\,2) - \frac{1}{2}$

Exercice 3 :

1) Montrons que la suite $(U_n)_{n\in IN}$ est décroissante.

$U_n - U_{n-1} = \dfrac{U_{n-1}}{1+3U_{n-1}} - U_{n-1}$

$$= -\frac{3U_{n-1}^2}{1+3U_{n-1}} < 0$$

Donc $(U_n)_{n\in IN}$ est décroissante si $U_n < 0;\quad \forall n \in IN$.

**Autre méthode :**

$(U_n)_{n\in IN}$ est une suite récurrente de la forme $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = \dfrac{x}{1+3x}$.

Étudions $f$; $\qquad D_f = IR - \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

Comme on a vu que $(\forall n \in IN)\ U_n > 0$, on se contente donc d'étudier $f$ sur IR+

$$f'(x) = \frac{(1+3x)-3x}{(1+3x)^2} = \frac{1}{(1+3x)^2} > 0;\quad \forall x \in IR+$$

D'où

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | |
| $f$ | $0$ $\nearrow$ | $1/3$ |

$f$ est strictement croissante sur IR+

Donc $(U_n)$ est monotone.

Comme $U_1 = \dfrac{U_0}{1+3U_0} = \dfrac{1}{1+3} = \dfrac{1}{4} < U_0 = 1$

D'où $(U_n)$ est décroissante.

2) On a : $U_1 = 1 > 0$

Supposons que : $U_n > 0$ (hypothèse de récurrence)

Alors $\quad U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+3U_n} > 0$ aussi

Donc $\forall n \in IN;\quad U_n > 0$

3) On a : $(U_n)$ décroissante et minorée par zéro.
D'où elle est convergente.

Sa limite $\ell \geq 0$ vérifie $\ell = \dfrac{\ell}{1+3\ell}$

Donc $\ell = 0$.

4) (a) $V_n = \dfrac{1+3U_{n-1}}{U_{n-1}} = \dfrac{1}{U_{n-1}} + 3 = V_{n-1} + 3$

Donc $(V_n)$ est une suite arithmétique de raison 3.

(b) Alors, d'après l'écriture d'une suite arithmétique, on a : $V_n = 3n+1$.

(c) D'où $U_n = \dfrac{1}{3n+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3n+1} = 0$.

**Exercice 4 :**

$f(x) = \dfrac{1}{x(Log\, x)^2}$

1) $D_f = IR_+^* - \{1\}$

$= ]0,1[ \cup ]1,+\infty[$

2) $\lim\limits_{n\to 0+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{n\to 1\pm} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = 0$

Asymptotes :

$\lim\limits_{n\to 0+} f(x) = +\infty \Rightarrow$ L'axe des « $y$ » est asymptote verticale à la courbe de $f$.

$\lim\limits_{n\to 1\pm} f(x) = +\infty \Rightarrow$ La droite d'équation « $x=1$ » est asymptote verticale à la courbe de f.

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ L'axe des « $x$ » est aussi asymptote horizontale à la courbe de $f$.

3) La fonction f est continue et dérivable sur son domaine de définition (par les théorèmes généraux) :

On posant $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

Avec $u(x) = 1$ et $v(x) = x(Log\, x)^2$

Alors $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

Où $u'(x) = 0$ et $v'(x) = (Log\, x)^2 + \dfrac{2xLog\, x}{x} = (Log\, x)^2 + 2Log\, x$

Donc

D'où $f'(x) = \dfrac{-(Log\,x) - 2}{x^2 (Log\,x)^3}$

4) Tableau de variations de f :

| $x$ | $0$ | | $e^{-2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\|$ | $-$ | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{e^2}{4}$ | $\nearrow$ $+\infty$ | $\|$ | $+\infty$ $\searrow$ | $0$ |

5) Représentation graphique de $f$ :