Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan
Département de Statistique et Informatique

Année universitaire : 2010/2011
Sciences économiques et Gestion
Semestre 2

Contrôle final d'Analyse Mathématique II
Durée: 2heures

Exercice 1 :
Calculer les intégrales suivantes :

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{(e^x+1)^2}; \qquad \text{et} \qquad K = \int_0^1 x^2 \operatorname{Arctg} x \, dx$$

Exercice 2 :
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$.

1. Vérifier que $I_0 = \dfrac{\pi}{4}$ et calculer I_1.
2. Montrer, par une intégration par parties, que pour $n \geqslant 2$, on a $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$.
3. En déduire la valeur de I_n en fonction de I_0 ou I_1 selon la parité de n.
4. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive décroissante et qu'elle converge vers 0.

Exercice 3 :

1. Étudier les variations de la fonction définie par :
$$f(x) = x - Log(1+x)$$
2. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :
$$U_{n+1} = Log(1+U_n); \qquad U_0 > 0.$$
est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4 :

1. Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $f_1(x) = \frac{1}{1+x}$ où $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$
2. Appliquer la formule de Taylor-Young, au voisinage de zéro, à la fonction $f_1(x) = \frac{1}{1+x}$. En déduire le développement limité au voisinage de zéro, à l'ordre 3, de la fonction $f_1(x) = \frac{1}{1+x}$.
3. Trouver le développement limité au voisinage de zéro, à l'ordre 3, de la fonction $f_2(x) = Log(1+x)$ à partir de celui de f_1.
4. Donner le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de zéro, de la fonction
$$f_3(x) = \frac{Log(1+x)}{(x-1)^2}.$$

Bon courage!