Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan
Département de Statistique et Informatique

Année universitaire : 2010/2011
Filière: Sciences économiques et Gestion
Semestre 1

Contrôle final d'Analyse Mathématique I
Durée: 2heures

07/01/2011
de 8h30 à 10h30

4 pts **Exercice 1** En utilisant la règle de l'Hospital, calculer les limites suivantes :

1. 2pts
$$\lim_{x\to 0^+} x^2 Log x$$

2. 2pts
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)-1}{Log\left(\frac{x+1}{x}\right)}$$

5 pts **Exercice 2** On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|\sqrt{|x|}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. 2 pts
2. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa réciproque. 3 pts

3pts **Exercice 3** Montrer que l'on peut prolonger la fonction f, définie par :

$$f(x) = |\sin x|^{\frac{1}{x}} \quad \text{pour} \quad x > 0,$$ 3pts

en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$.

3pts **Exercice 4** Examiner si la représentation graphique C_f de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$ 3pts

admet une demi-tangente au point de C_f d'abscisse $x = 0$.

5 pts **Exercice 5** On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que : 3pts
$$\frac{x^2}{(x+1)^2}\exp\left(\frac{1}{x+1}\right) < x^2\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\right) < \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

2. Déterminer la limite 2pts
$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)$$

Contrôle final d'Analyse Mathématique I

Correction

Exercice 1 :

1) $\lim_{x \to 0^+} x^2 \log x$ est une forme indéterminée de type $(0 \times \infty)$, que l'on peut transformer sous forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, comme suit : $\lim_{x\to 0^+} x^2 \log x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{2} = 0$$

2) Posons $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1$ et $g(x) = \log\left(\frac{x+1}{x}\right)$; on a :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\exp\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad g'(x) = -\frac{1}{x(x+1)}$$

Et comme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}}{-\frac{1}{x(x+1)}} = \lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$$

On déduit que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1$;

et par conséquent, on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{\log\left(\frac{x+1}{x}\right)} = 1$ ■

Exercice 2 :

1) Il est clair que f est continue en tout réel non nul.
Montrons que f est continue en 0.

Si $x > 0$; $f(x) = \sqrt{x}$ donc $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

Si $x < 0$; $f(x) = -\sqrt{-x}$ donc $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

Ainsi $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0$,
ceci montre que f est continue en 0.

2) Montrons que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $x > 0$; $f(x) = \sqrt{x}$ donc f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$;
Si $x < 0$; $f(x) = -\sqrt{-x}$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$.

$$x < y \Rightarrow \sqrt{-x} > \sqrt{-y} \Rightarrow -\sqrt{-x} < -\sqrt{-y} \Rightarrow f(x) < f(y)$$

Puisque f est continue en 0, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.
Mais $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Sa fonction réciproque f^{-1} est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(x) = y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|x|\sqrt{|x|}}{x} = y \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |y| = \sqrt{|x|} \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = |x| \\ xy > 0 \end{cases}$$

$x \geq 0$
$\sqrt{x} = y \Rightarrow x = y^2 = y|y|$

$x < 0$
$-\sqrt{-x} = y \Rightarrow \sqrt{-x} = -y$
$\Rightarrow +\sqrt{-x} = |y| \Rightarrow -x = |y|^2$
$\Rightarrow x = -|y|^2 = y|y|$

D'où si $x>0$; $y>0$ et $x=y^2=y|y|$

si $x<0$; $y<0$ et $x=-y^2=y|y|$

donc
$$f^{-1}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longmapsto f^{-1}(x)=x|x|.$$

Exercice 3 :

La fonction $f(x)=|\sin x|^{\frac{1}{x}}$ n'est pas définie pour $x=0$

Lorsque $x\longrightarrow 0^+$; $\frac{1}{x}\log|\sin x|\longrightarrow -\infty$

d'où $|\sin x|^{\frac{1}{x}}\xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$

On peut donc prolonger la fonction f, sur $\mathbb{R}^+$, en une fonction continue g définie par $\forall x\geq 0$
$$g(x)=\begin{cases}|\sin x|^{\frac{1}{x}} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Exercice 4 :

Si $x>0$; $f(x)=x^x=e^{x\log x}$
$$f'(x)=e^{x\log x}\left(\log x+x.\frac{1}{x}\right)=e^{x\log x}(\log x+1)$$
$$\lim_{x\to 0}x\log x=0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0}e^{x\log x}=1$$
$$\lim_{x\to 0}(\log x+1)=-\infty$$
$$\lim_{x\to 0}f'(x)=-\infty$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ représentant f admet une demi-tangente à droite au point $A(0,1)$ portée par Oy.

Exercice 5 :

Sol^n de l'ex 5 :

1) La dérivée de f est donnée sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

Le théorème des accroissements finis montre que, pour tout $x>0$, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que $f'(c) = f(x+1) - f(x)$ c'est-à-dire

$$-\frac{1}{c^2}\exp\left(\frac{1}{c}\right) = \exp\left(\frac{1}{x+1}\right) - \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

On vérifie facilement que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}\exp\left(\frac{1}{t}\right)$ est strictement ↘ sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit les inégalités

$$\frac{1}{(x+1)^2}\exp\left(\frac{1}{x+1}\right) < \frac{1}{c^2}\exp\left(\frac{1}{c}\right) < \frac{1}{x^2}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

puis les inégalités

$$\underbrace{\frac{x^2}{(x+1)^2}\exp\left(\frac{1}{x+1}\right)} < \frac{x^2}{c^2}\exp\left(\frac{1}{c}\right) = \underbrace{x^2\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)} < \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

2) Les fonctions apparaissant aux extrémités tendent toutes deux vers 1 lorsque $x \to \infty$, alors le th. d'encadrement donne

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} x^2\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\right) = 1}$$