Statistique appliquée à la logistique

Pr. Mohamed El Merouani

1

Chaînes de Markov

Introduction:

- On considère un système dont on peut décrire la transition d'un état à un autre en termes de probabilités.
- L'état du système en t est alors caractérisé par la variable aléatoire X_t.
- Notre problème principal est de prévoir l'évolution future du système.

Introduction:

- On est amené à étudier le comportement d'une chaîne de Markov, chaque fois que les conditions suivantes sont réunies:
- Le système ne peut prendre qu'un nombre fini d'états i=0, 1, 2,…, N;
- La base de temps utilisée est discrète avec t=0, 1,…, T
- Le système est sans mémoire (propriété de Markov)
- La système est homogène dans le temps.

Analyse théorique des chaînes de Markov:

- Nous examinons successivement:
- Les probabilités de transition d'un état i du système à un état j;
- L'évolution des états du système;
- La classification des états du système.

Les probabilités de transition:

- Notons $Pij = P(X_t = j / X_{t-1} = i)$

(cette probabilité ne dépend que de i et de j) la probabilité de transition de l'état i à l'état j à la période suivante.

- Le terme P_{ij} étant indicé par i et par j, on peut le considérer comme l'élément de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne d'une matrice P=(P_{ij}).
- Cette matrice s'appelle matrice de transition.

Remarques:

- i et j représentent des états: i et j varient de 0 à N; la matrice P est donc carrée;
- P ne dépend pas de la période (condition d'homogénéité d'une chaîne de Markov).
- Les termes P_{ij} de la matrice P sont des probabilités, donc on a P_{ij}≥0 et la somme des termes d'une même ligne égale 1 ($\sum_{j=0}^{N} P_{ij} = 1$)
- On note $q_i(t) = P(X_t = i)$

Exemple:

- Soit un système qui peut prendre deux états, 0 et 1, et tel que la probabilité pour que le système ne change pas d'état soit 1/3.
- La matrice de transition P aura la forme:

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{pmatrix}$$

- Alors $P_{00} = \frac{1}{3}$
- Et $P_{00} + P_{01} = 1$, donc $P_{01} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Exemple:

- De même, par hypothèse, $P_{11} = \frac{1}{3}$ et on obtient $P_{10} = \frac{2}{3}$
- Il vient donc

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

- On connaît la chaîne de Markov représentant le système si l'on donne de plus l'état initial.
- Par exemple $P(X_0 = 1) = 1$; c'est-à-dire $q_0(0) = 0$ et $q_1(0) = 1$

Évolution des états du système:

- Déterminons d'abord les probabilités de transition d'un état i à un état j en t périodes.
- Si t=1, ces probabilités sont les éléments de P.
- Si t=2; à la période 0, le système est, par exemple, dans l'état i. On cherche la probabilité pour qu'il soit dans l'état j à la période 2, c'est-à-dire $P(X_2 = j / X_0 = i)$.

Évolution des états du système:

- On connaît l'état du système en 0 et en 2, mais on ne le connaît pas en 1. On doit donc envisager toutes les possibilités de valeurs pour X_1, de sorte que

$$P(X_2 = j / X_0 = i) = \sum_{k=0}^{N} P(X_2 = j \, et \, X_1 = k / X_0 = i)$$
$$= \sum_{k=0}^{N} P(X_2 = j / X_1 = k) \cdot P(X_1 = k / X_0 = i)$$
$$= \sum_{k=0}^{N} P_{ik} \cdot P_{kj}$$

Évolution des états du système:

- Or, $\sum_{k=0}^{N} P_{ik} \cdot P_{kj}$ constitue, en raison des propriétés du produit de matrices, un élément du produit $P \times P = P^2$.
- Pour t quelconque, les probabilités de transition d'un état i à un état j en t périodes sont les éléments de P^t, que l'on note

$$P^t = \left(P_{ij}^{(t)}\right)$$

Évolution des états du système:

- Déterminons la loi de X_t;

$$P(X_t = j) = \sum_{i=0}^{N} P(X_0 = i \ et \ X_t = j)$$
$$= \sum_{i=0}^{N} P(X_0 = i) \cdot P(X_t = j / X_0 = i)$$

$$q_j(t) = \sum_{i=0}^{N} q_i(0) \cdot P_{ij}^{(t)}$$

Exemple:

- Appliquons ce qui précède à l'exemple précédent,
  avec $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ et X_0=1
- Écrivons la loi de X_1:

i	0	1
P_i	2/3	1/3

- Pour déterminer la loi de X_t, nous devons calculer P^t.
- Ce calcul s'effectue, lorsque c'est possible, grâce à une matrice diagonale semblable à P.
- Cette matrice diagonale est formée avec les valeurs propres de P.
- Calculons ces valeurs propres λ et, pour cela, le polynôme caractéristique de P:

$$\det(P-\lambda I)=\begin{vmatrix}\frac{1}{3}-\lambda & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\cdot\left(\lambda+\frac{1}{3}\right)$$

L'équation caractéristique est donc

$$(\lambda-1)\cdot\left(\lambda+\frac{1}{3}\right)=0 \Rightarrow \lambda_1=1\ ;\ \lambda_2=-\frac{1}{3}$$

λ_1 et λ_2 sont donc valeurs propres.

P, de dimension 2, admet deux valeurs propres simples et donc diagonalisable.

- La matrice diagonale associée est alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- Pour calculer P^t, nous avons besoin de la matrice de passage constituée des composantes des valeurs propres associée aux valeurs propres.

- Si v est vecteur propre, ses coordonnées (x,y) vérifient:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3}-\lambda\right)x+\frac{2}{3}y=0 \\ \frac{2}{3}x+\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)y=0 \end{cases}$$

- On obtient, pour λ=1; x=1, y=1.
- De même, pour $\lambda=-\frac{1}{3}, x=1 \ et \ \ y=-1$

- La matrice de passage est donc

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

- Il vient alors,

$$P=A\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\cdot A^{-1}$$

$$et\ \ P^{t}=A\cdot\begin{pmatrix}1^{t} & 0\\ 0 & \left(\frac{-1}{3}\right)^{t}\end{pmatrix}\cdot A^{-1}$$

- Or $A^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{pmatrix}$

- Donc

$$P^{t}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \left(\frac{-1}{3}\right)^{t}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^{t} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^{t}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^{t} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^{t}\end{pmatrix}$$

- Nous en tirons dans le cas où $q_1(0)=1$

$$P(X_t = 0) = q_0(0)P_{00}^{(t)} + q_1(0)P_{10}^{(t)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^t$$

$$P(X_t = 1) = q_0(0)P_{01}^{(t)} + q_1(0)P_{11}^{(t)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^t$$

- Si $t \to \infty$; $P(X_t=0) \to 1/2$ et $P(X_t=1) \to 1/2$

Conclusion:

- au bout d'un temps infini, le système sera dans l'un des états 0 ou 1 avec la même probabilité 1/2.

Remarques:

- Le recours à l'ordinateur est nécessaire, sauf cas très particulier, dès lors que la dimension de la matrice P est supérieure à 3.

Classification des états du système:

- La classification des états du système à la période t ne fait intervenir que la matrice P et non la distribution initiale.
- Un état i est dit non répétitif (transitoire) si, pour tout t entier strictement positif $P_{ii}^{(t)} = 0$
- Ceci signifie qu'une fois parti de i, on ne peut y revenir et qu'on ne peut rester en i.
- Dans la matrice P, cela se traduit par une colonne de zéros.

- Un état répétitif i (récurent) est un état qui n'est pas non répétitif, c'est-à-dire qu'il existe t entier strictement positif tel que $P_{ii}^{(t)} > 0$
- Un état i est dit absorbant si le système ne peut plus le quitter une fois qu'il y entre, c'est-à-dire $P_{ii} = 1$