Chapitre 5
Suites de nombres réels

Prof. Mohamed El Merouani

Département de Statistique et Informatique

2010-2011

Plan

- Définition
- Suites croissantes et suites décroissantes
- Suites majorées, suites minorées et suites bornées
- Limite d'une suite, suite convergente et suite divergente
- Théorèmes généraux et applications
- Suites arithmétiques et suites géométriques
- Suites récurrentes
- Exercices

Introduction

Définition

Une suite de nombres réels est une application U de $\mathbb{N}$ ou une partie I de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} U : \quad \mathbb{N} &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ n &\mapsto \quad U(n) = U_n \end{aligned}$$

Alors la suite est dite de terme général U_n, ou la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$; ou simplement (U_n).

Remarque :

- Une suite peut être finie ou infinie.
- Si I est fini, la suite $(U_n)_{n\in I}$ est dite finie.
- Si I est infinie, la suite $(U_n)_{n\in I}$ est dite infinie.

Introduction

Remarque :

- L'ensemble $\{U_n/n \in I\}$ est dit l'ensemble des valeurs de la suite $(U_n)_{n\in I}$.
- Si une suite est finie, l'ensemble de ses valeurs est fini. Par contre, une suite infinie peut avoir un ensemble de valeurs fini.

Exemple :

La suite $U : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ de terme général $U_n = (-1)^n$ est une suite infinie (car $I = \mathbb{N}$), mais son ensemble de valeurs est fini : il ne peut prendre que deux valeurs 1 et -1 (soit la paire $\{-1, 1\}$.

Suites croissantes et suites décroissantes

Définition

Soient n et m deux entiers naturels : $n, m \in \mathbb{N}$; et soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

- (U_n) est une suite croissante si, et seulement si, $\forall n, m \in \mathbb{N}(n \leq m \Rightarrow U_n \leq U_m)$
- (U_n) est une suite strictement croissante si, et seulement si, $\forall n, m \in \mathbb{N}(n < m \Rightarrow U_n < U_m)$
- (U_n) est une suite décroissante si, et seulement si, $\forall n, m \in \mathbb{N}(n \geq m \Rightarrow U_n \leq U_m)$
- (U_n) est une suite strictement décroissante si, et seulement si, $\forall n, m \in \mathbb{N}(n > m \Rightarrow U_n < U_m)$

Exemple :

Montrons que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

Suites croissantes et suites décroissantes

Plusieurs méthodes de démonstration sont possibles :
Méthode directe :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \qquad U_{n+1} - U_n = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+2} - \frac{2n+1}{n+2}$$

$$= \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+1}{n+2}$$

$$= \frac{(2n+3)(n+2) - (n+3)(2n+1)}{(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{3}{(n+2)(n+3)} \geq 0$$

Donc, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}; U_{n+1} - U_n \geq 0$

Suites croissantes et suites décroissantes

Autre méthode directe :

$$U_{n+1} = \frac{2n+3}{n+3} = \frac{2(n+3)}{n+3} - \frac{3}{n+3} = 2 - \frac{3}{n+3}$$

$$U_n = \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2(n+2)}{n+2} - \frac{3}{n+2} = 2 - \frac{3}{n+2}$$

$$\text{Donc} \qquad \forall n \in \mathbb{N}; \quad U_{n+1} \geq U_n$$

$$\text{Puisque} \qquad \forall n \in \mathbb{N}; \quad \frac{3}{n+3} \leq \frac{3}{n+2}$$

D'où $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Suites croissantes et suites décroissantes

Méthode par étude de fonction :

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $U_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$

Étudions f sur $\mathbb{R}^+$ (car $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}^+$) :

$$f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$1/2$	$\nearrow$	2

Suites croissantes et suites décroissantes

Méthode par étude de fonction :
Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Ainsi ;

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad f(n+1) \geq f(n)$$

C'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}; U_{n+1} \geq U_n$$

D'où $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice :

Montrer de même, par ces deux méthodes, que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Suites croissantes et suites décroissantes

Remarque :

Il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes.

Exemple :

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1)^n$ n'est ni croissante, ni décroissante
$(U_0 = 1 > U_1 = -1$ et $U_1 = -1 < U_2 = 1)$.

Suites majorées, suites minorées et suites bornées

Définition :

- Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite majorée si, et seulement si, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}; U_n \leq M$.
- Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite minorée si, et seulement si, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}; m \leq U_n$.
- Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite bornée lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée (c'est-à-dire lorsqu'il existe $m, M \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}; m \leq U_n \leq M$).

Suites majorées, suites minorées et suites bornées

Exemple :

Montrons que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Là encore plusieurs méthodes sont possibles :

Méthode directe :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \frac{2n+1}{n+2} \geq 0;$$

donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée (par 0).

$$(\forall n \in \mathbb{N}), U_n = \frac{2n+1}{n+2} \leq \frac{2n+4}{n+2} = \frac{2(n+2)}{n+2} = 2;$$

donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (par 2).
Ainsi a-t-on : $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ; $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 \leq U_n \leq 2$.

Suites majorées, suites minorées et suites bornées

Méthode par étude de fonction :
Comme on a déjà remarqué $U_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ et le tableau de variations de f est le suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	2

Donc ; $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{1}{2} \leq f(n) \leq 2$
Soit ; $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{1}{2} \leq U_n \leq 2.$

Suites majorées, suites minorées et suites bornées

Remarque :

On obtient un encadrement de U_n plus fin par cette seconde méthode (par étude de fonction).

Exercice proposé :

Montrer de même, par ces deux méthodes que $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Limite d'une suite, suite convergente et suite divergente

Définition

Soit la suite de nombres réels

$$U : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & U_n \end{array}$$

La suite (U_n) est dite convergente et de limite ℓ si,

$$\forall \epsilon > 0, \exists A \in \mathbb{N}, n > A \Rightarrow |U_n - \ell| < \epsilon$$

On écrit : $U_n \longrightarrow_{n \to +\infty} \ell$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n) = \ell$

Limite d'une suite, suite convergente et suite divergente

Une suite non convergente est dite divergente. Une suite divergente est une suite qui n'admet pas de limite ou sa limite est infinie.
Une suite (U_n) a une limite infinie si, et seulement si,

$$(\forall K > 0); (\exists A \in \mathbb{N}); (\forall n \geq A \Rightarrow U_n \geq K)$$

On dit que (U_n) tend vers $+\infty$ quand n tend $+\infty$, et on écrit

$$\lim_{n \to +\infty} (U_n) = +\infty$$

Limite d'une suite, suite convergente et suite divergente

Exemples :

- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} = (e^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, (car on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(e^{-n}) = 0$).

Limite d'une suite, suite convergente et suite divergente

Exemples :

- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} = (e^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, (car on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(e^{-n}) = 0$).
- $(V_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge (car on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n) = +\infty$).

Limite d'une suite, suite convergente et suite divergente

Exemples :

- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} = (e^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, (car on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(e^{-n}) = 0$).
- $(V_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge (car on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n) = +\infty$).
- $(W_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, car on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n$ n'existe pas puisque

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Étude de la suite (a^n) avec $a \in \mathbb{R}^*$:

Pour tout réel a non nul, on a :

- Si $|a| < 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} (a^n) = 0$

Étude de la suite (a^n) avec $a \in \mathbb{R}^*$:

Pour tout réel a non nul, on a :

- Si $|a| < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (a^n) = 0$
- Si $|a| > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (a^n) = +\infty$

Étude de la suite (a^n) avec $a \in \mathbb{R}^*$:

Pour tout réel a non nul, on a :

- Si $|a| < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (a^n) = 0$
- Si $|a| > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (a^n) = +\infty$
- Si $a = 1$, la suite (a^n) est convergente (constante) et égale à 1.

Étude de la suite (a^n) avec $a \in \mathbb{R}^*$:

Pour tout réel a non nul, on a :

- Si $|a| < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty}(a^n) = 0$
- Si $|a| > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty}(a^n) = +\infty$
- Si $a = 1$, la suite (a^n) est convergente (constante) et égale à 1.
- Si $a = -1$, la suite (a^n) est égale à 1 ou -1 selon la parité de l'entier naturel n.

Théorèmes généraux et applications

Théorème fondamental :

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Explication :

- Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée par M, alors :

$$U_1 \leq U_2 \leq U_3 \leq \cdots \leq U_n \leq U_{n+1} \leq \cdots \leq M$$

(Les U_n finissent par "s'agglomerer" et la limite sera un majorant de la suite).

- Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée par m, alors :

$$U_1 \geq U_2 \geq U_3 \geq \cdots \geq U_n \geq U_{n+1} \geq \cdots \geq m$$

(Les U_n finissent par "s'agglomerer" et la limite sera un minorant

Théorème fondamental :

Exemple :

Montrer que la suite de terme général

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$$

est convergente.

- Cette suite est croissante, en effet :

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0, (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Théorème fondamental

Exemple :

- Elle est majorée, en effet :

$$U_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{\underbrace{2 \cdot 2 \ldots 2}_{n-1 fois}} =$$

(car $\frac{1}{k!} = \frac{1}{2 \times 3 \times \cdots \times k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$)

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$$

Donc

$$U_n \leq 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq 3$$

Théorème fondamental

Exemple :
Ainsi
$$(\forall n \in \mathbb{N}), U_n \leq 3.$$
(U_n) est croissante et majorée. Donc, elle converge.
On remarque que le majorant trouvé (3) n'est pas la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (en fait, $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n) = e$).

Propriété :

- Une suite croissante, mais non majorée tend vers $+\infty$.
- Une suite décroissante, mais non minorée tend vers $-\infty$.

Théorème des suites adjacentes

Définition et théorème :

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes lorsque :

- $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n - U_n) = 0$
  Dans ce cas ces suites convergent et ont même limite.

Explication :

(U_n) croissante, (V_n) décroissante, $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n - U_n) = 0$ et ℓ est la limite commune :

$$U_1 \leq U_2 \leq \cdots \leq U_n \leq U_{n+1} \leq \cdots \leq \ell \leq \cdots \leq V_{n+1} \leq V_n \leq \cdots \leq V_2 \leq V_1$$

Théorèmes d'encadrements

Théorème 1 :

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$; $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de nombres réels.
Si $\forall n \in \mathbb{N}; U_n \leq V_n \leq W_n$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent avec $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \ell \in \mathbb{R}$; alors $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \ell$.

Théorème 2 :

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels.
Si $\forall n \in \mathbb{N}; U_n \leq V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$.

Théorème 3 :

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels.
Si $\forall n \in \mathbb{N}; U_n \leq V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.

Théorèmes d'encadrements

Remarque :

Par passage à la limite les inégalités se conservent (conséquence des trois théorèmes précédents) mais il faut noter que les inégalités **strictes** se transforment en inégalités **larges** :
Si $(\forall n \in \mathbb{N})$, on a $U_n < V_n$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ (on n'a pas nécessairement $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n < \lim\limits_{n \to +\infty} V_n$).

Contre-exemple :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \text{on a} \qquad U_n = \frac{1}{n+2} < V_n = \frac{1}{n+1};$$

$$\text{mais } \lim_{n \to +\infty} U_n = 0 \leq \lim_{n \to +\infty} V_n = 0$$

Suites arithmétiques et suites géométriques

Suites arithmétiques :

On appelle suite arithmétique de nombres réels, toute suite réelle (U_n) telle que : $\exists r \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}; U_{n+1} - U_n = r$.
Le nombre réel r est alors appelé "raison de la suite arithmétique".

Remarque :

Il résulte de la définition qu'une telle suite est déterminée dès que l'on fixe le premier terme (U_0 ou U_1 par exemple) et la raison r.
On a : $U_{n+1} = U_n + r$ et $U_n = U_{n-1} + r$
On déduit : $U_n = \frac{U_{n-1}+U_{n+1}}{2}$
Donc U_n est la moyenne arithmétique de U_{n-1} et U_{n+1}, termes qui encadrent U_n. D'où le nom de "suite arithmétique".

Suites arithmétiques :

Compléments :

Le mot "Raison" vient du latin "Ratio" (qui veut dire : calcul, compte, mesure, faculté de juger, motif) qui a donné également ration, rationnel, et, plus récemment, ratio (en passant par l'Anglais) au sens d'indice exprimant le rapport de deux grandeurs, en Comptabilité et Gestion.

Ecriture générale d'une suite arithmétique :

Soit une suite arithmétique (U_n) de raison r et de premier terme $U_1 = a$, avec $a \in \mathbb{R}$.
Le premier terme a est appelé la base de la suite.

$$U_1 = a$$

$$U_2 = a + r$$

$$U_3 = U_2 + r = a + r + r = a + 2r$$

Suites arithmétiques :

Ecriture générale d'une suite arithmétique :

$$\vdots$$

$$U_n = U_{n-1} + r = a + (n-1)r$$

$$\Rightarrow \boxed{U_n = a + (n-1)r}$$

Somme des termes d'une suite arithmétique :

Soit S_n la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique :

$$S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$$

Remplaçons les différents termes par leurs valeurs données par l'écriture générale :

Suites arithmétiques :

Somme des termes d'une suite arithmétique :

$$S_n = a + (a + r) + (a + 2r) + (a + 3r) + \cdots + (a + (n-1)r)$$

On peut écrire aussi (et dans l'ordre inverse) :

$$S_n = U_n + (U_n - r) + (U_n - 2r) + \cdots + (U_n - (n-1)r)$$

Maintenant, faisons la somme des termes :

$$2S_n = (U_n + a) + (U_n + a) + \cdots + (U_n + a) = n(U_n + a)$$

$$\text{D'où} \qquad \boxed{S_n = \frac{n(U_n + a)}{2}}$$

où n est le nombre de termes que l'on somme.
$a = U_1$ est le premier terme ou la base.
U_n est le dernier terme.

Suites géométriques :

Définition :

On appelle suite géométrique de nombres réels, toute suite réelle (U_n) telle que : $\exists q \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}; U_{n+1} = qU_n$.
Le nombre réel q est alors appelé "raison de la suite géométrique".

Remarque :

Une telle suite est déterminée dès que l'on fixe le premier terme (U_0 ou U_1 par exemple) et la raison q.
De : $\quad U_{n+1} = qU_n \quad$ et $\quad U_n = qU_{n-1}$
On déduit : $\quad |U_n| = \sqrt{U_{n-1} \times U_{n+1}}$
Donc, chaque terme est la moyenne géométrique des deux termes qui l'encadrent. D'où le nom de "suite géométrique".

Suites géométriques :

Écriture générale d'une suite géométrique :

Soit $a \in \mathbb{R}$ le premier terme d'une suite géométrique (U_n) de raison q.

$$U_1 = a$$

$$U_2 = qa$$

$$U_3 = qU_2 = qqa = q^2a$$

$$\vdots$$

$$U_n = qU_{n-1} = q(q^{n-2})a$$

$$\Rightarrow \boxed{U_n = q^{n-1}a}$$

Suites géométriques :

Somme des termes d'une suite géométrique :

Soit S_n la somme des n premiers termes d'une suite géométrique (U_n)

$$S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$$

Remplaçons les différents termes par leurs valeurs :

$$S_n = a + qa + \cdots + q^{n-1}a$$

Alors $\quad qS_n = q^n a + q^{n-1}a + \cdots + q^2 a + qa$

Donc $\quad S_n - qS_n = a - q^n a$

C'est-à-dire $\quad S_n(1-q) = a(1-q^n)$

Suites géométriques :

Somme des termes d'une suite géométrique :

Soit, si $q \neq 1$, $\boxed{S_n = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}}$

si $q = 1$, il est immédiat que $\boxed{S_n = na}$

où n est le nombre de termes que l'on somme.

$a = U_1$ est le premier terme ou "la base".

et q la raison.

Suites récurrentes

Définition :

Une suite récurrente est une suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme :

$$\begin{cases} U_0 & \text{donné} \\ U_{n+1} = f(U_n) & \text{où } f \text{ est une fonction} \end{cases}$$

Exemple 1 :

Les suites de type

$$\begin{cases} U_0 = \lambda \in \mathbb{R} & \text{donné} \\ U_{n+1} = aU_n + b; \forall n \in \mathbb{N} & \text{avec } a \text{ et } b \text{ deux réels donnés,} \end{cases}$$

sont des suites récurrentes où la fonction est $f(x) = ax + b$.
On les appelle, parfois, des suites arithmético-géométriques.

Suites récurrentes

Remarque :

Pour étudier la convergence d'une suite récurrente, on tentera d'utiliser le théorème fondamental, c'est-à-dire "*Toute suite croissante et majorée, est convergente...*"
La difficulté réside donc dans la recherche d'un minorant ou d'un majorant et l'étude de la monotonie de la suite.

Exemple 2 :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} U_0 = \alpha > 0 \\ U_{n+1} = \frac{1+U_n}{2\sqrt{U_n}} \end{cases}$$

Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); U_n \geq 1$.

Suites récurrentes

Exemple 2 :

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\ U_n - 1 = \frac{1+U_{n-1}}{2\sqrt{U_{n-1}}} - 1$

$$= \frac{1 + U_{n-1} - 2\sqrt{U_{n-1}}}{2\sqrt{U_{n-1}}}$$

$$= \frac{(1 - \sqrt{U_{n-1}})^2}{2\sqrt{U_{n-1}}} \geq 0$$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\ U_n \geq 1$

Suites récurrentes

Théorème :

Si f est une fonction **croissante**, la suite récurrente $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_{n+1} = f(U_n)$ est **monotone**.
Ainsi, si $U_0 \leq U_1$; $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
si $U_0 > U_1$; $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Suites récurrentes

Détermination de la limite d'une suite récurrente convergente :

Théorème :

Soit f une fonction **continue**.

Si on sait que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 & \text{donnée} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$ est convergente,

alors sa limite ℓ vérifie : $f(\ell) = \ell$.

Démonstration :

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$

Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(U_n) = f(\lim\limits_{n\to+\infty} U_n)$ car f est continue.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = f(\ell)$;

D'où $f(\ell) = \ell$.

Suites récurrentes

Remarque :

Ce théorème permet de calculer la limite ℓ de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à condition d'avoir préalablement montré qu'elle est convergente. Il ne permet pas d'établir que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
(L'équation $f(x) = x$ pourrait avoir une solution sans que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge !).

Exercices

Les exercices seront corrigés en T.D.