Pourquoi des séries sont non stationnaires?

- La première série non stationnaire à laquelle on pense est celle qui est croissante dans le temps.
- Une série saisonnière est également non stationnaire puisque la valeur espérée dépend du temps dans la période de la saison.
- Une série dont la dispersion varie dans le temps n'est pas stationnaire.

Comment rendre une série stationnaire?

- En fait, en prenant une série brutalement, on a fort peu de chances pour qu'elle soit stationnaire.
- La transformation par le Logarithme permet d'éviter le problème de qu'une série ait une dispersion qui varie dans le temps.
- Comme on peut aussi utiliser les techniques de lissage de la série.

4) Processus linéaires:

•Les processus linéaires est un cas particulier des processus stationnaires et érgodiques.

•Ces processus se caractérisent par le fait qu’ils peuvent se représenter comme combinaison linéaire de variables aléatoires.

•Les types suivants de processus linéaires seront étudiés:

- Processus purement aléatoires,
- Processus auto-regressifs,
- Procesus de moyennes mobiles *(moving-average)*
- et les processus obtenus comme combinaison de ces deux dérniers.
- En un premier lieu, on va voir la définition de ces processus, et après on justifiera pourquoi on se limitera à étudier exclusivement ces types de processus.

- Le processus purement aléatoire est le plus simple de tous. Il peut s'exprimer de la forme suivante:

$$Y_t=e_t$$

Où e_t satisfait les propriétés suivantes:

$E[e_t]=0$ pour tout t

$E[e_t]^2=\sigma^2$ pour tout t

$E[e_t e_{t'}]=0$ pour $t \neq t'$.

Donc e_t se caractérise par sa moyenne nulle, par sa variance constante dans le temps et par le fait qu'il n'existe pas de relation entre deux valeurs de la variable prises en deux instants distincts du temps.

- Les caractéristiques de e_t sont identiques à celles qui a la perturbation aléatoire dans le modèle de régression linéaire multiple sous les hypothèses élémentaires.
- Dans la théorie des séries temporelles, on a l'habitude de nommer un processus purement aléatoire par "bruit blanc" (ou "white noise").
- Par la suite, on désignera par e_t une variable aléatoire qui a les propriétés vues précédement.

- Comme il n'existe pas de relation entre des valeurs prises dans différents instants de temps, le "bruit blanc" est loin du concept intuitive de processus stochastique que nous avons vu.
- Autrement dit, pour utiliser des variables aléatoires du type de e_t, on n'a pas besoin de la théorie des processus stochastique.
- Certes! Mais le "bruit blanc" est indispensable pour l'élaboration des modèles de processus stochastiques très complexes comme les modèles de la classe AR (Auto-regressive) et les modèles de la classe MA (Moyennes mobiles; Moving-average) que nous allons voir.

- Le processus auto-regressifs d'ordre p, noté $AR(p)$ s'exprime de la forme suivante:

$$Y_t=\Phi_1 Y_{t-1}+\Phi_2 Y_{t-2}+\ldots+\Phi_p Y_{t-p}+e_t$$

  Les coefficients Φ_i sont très similaires aux coefficients de régression des modèles de régression multiple.

- L'appellation auto-regressif provient de que Y_t s'obtient par regression sur les valeurs déphasées par rapport à elle.

- Comme on peut le voir, dans un processus $AR(p)$, apparaîssent un "bruit blanc" par rapport à l'instant t présent et la variable déphasée pour différents périodes, où p est le retard maximum qui apparaît dans le processus.

- Les processus auto-regressifs ont été introduits pour la première fois par Yule (1927).
- Un processus de moyennes mobiles d'ordre q, ou un processus $MA(q)$ est donné par:

$$Y_t=e_t-\theta_1 e_{t-1}-\theta_2 e_{t-2}-\ldots-\theta_q e_{t-q}$$

L'expression de moyennes mobiles fait référence au fait que la variable Y_t s'obtient comme moyenne des variables "bruit blanc" (dans ce cas $q+1$), où les θ_i sont les pondérations. Et comme les variables qui interviennent dans cette moyenne varient dans le temps, elles reçoivent le nom de mobiles.

- C'est aussi Yule (1921, 1926) qui a introduit ce processus.
- Finalement, par une combinaison d'un processus auto-regressif et un processus de moyennes mobiles, on obtient un processus $ARMA(p,q)$, ou p indique le retard maximum de la part auto-regressif et q celle des moyennes mobiles.
- La divulgation et la popularisation de ce type de processus a été fondamentalement faite par Box et Jenkins (1971). Mais, ces processus ont été étudiés auparavant par Wold (1938) et Barlett (1946).

- L'expression d'un processus *ARMA(p,q)* est la suivante:

$$Y_t=\Phi_1 Y_{t-1}+\Phi_2 Y_{t-2}+\ldots+\Phi_p Y_{t-p}+e_t-\theta_1 e_{t-1}-\theta_2 e_{t-2}-\ldots-\theta_q e_{t-q}$$

- Maintenant, on peut justifier pourquoi on se limitera à l'étude exclusive de ces types de processus.

- En 1938, le Pr. Wold donne l'énoncé et la démonstration du théorème suivant:

- Un processus stationnaire quelconque Y_t peut être univoquement représenté comme la somme de deux processus mutuellement incorrelés $Y_t=D_t+X_t$. Où D_t est linéairement déterministe et X_t est un processus $MA(\infty)$.
- Contrairement au processus déterministe, X_t est la part des moyennes mobiles ou purement non déterministe.
- La part déterministe D_t peut être une fonction exacte du temps. Par exemple: $D_t=A\cos(\omega t)$ décrivant une oscillation sinusoïdale au cours du temps.

- Le cas le plus simple de D_t consiste à l'égaliser à une constante: $D_t=\mu$.
- Revenant au théorème de Wold, il convient d'appliquer la représentation $Y_t=D_t+X_t$ à n'importe quel processus stationnaire, linéaire ou non.
- Pour des raisons pratiques, on ne peut pas utiliser un *MA* avec retards infinis. Mais, on estime que plusieurs processus stationnaires peuvent être approximés par un *MA* avec un nombre de retards non trop élevés.

- Au lieu d'un $MA(\infty)$, aussi, on peut utiliser un *AR* ou un *ARMA* fini, comme on va voir dans le chapitre suivant.

- Avant de conclure ce chapitre, on signale que l'on peut confondre les termes "processus" et "modèles" parce que on leur donne, dans ce cours, la même signification.