- En un processus *AR(2)*, et en utilisant l'inverse de l'opérateur polynomiale des retards, on peut obtenir Y_t:

$$Y_t = \Phi^{-1}(L)e_t = \frac{1}{1-\Phi_1 L - \Phi_2 L^2} e_t$$

- Si $1/\lambda_1$ et $1/\lambda_2$ sont les racines du polynôme caractéristique $1\text{-}\Phi_1 L\text{-}\Phi_2 L^2=0$, on peut factoriser le dinominateur de l'expression précédente:

$$Y_t = \frac{1}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)} e_t$$

- Par développement en fractions rationnelles, on aura:

$$\frac{1}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)} = \frac{A}{1-\lambda_1 L} + \frac{B}{1-\lambda_2 L}$$

- A et B sont des constantes que l'on détermine de la façon suivante:

$$1=(1-\lambda_2 L)A+(1-\lambda_1 L)B=(A+B)+(-\lambda_2 A-\lambda_1 B)L$$

- Par identification on aura:

$$A+B=1$$

$$-\lambda_2 A-\lambda_1 B=0$$

- La solution du système précédente donne:

$$A = \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \quad \text{et} \quad B = \frac{-\lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)}$$

- Par conséquent, on obtient:

$$Y_t = \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{1}{1 - \lambda_1 L} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{1}{1 - \lambda_2 L} \right] e_t$$

$$= \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\lambda_1 L\right)^j - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\lambda_2 L\right)^j \right] e_t$$

- Ainsi, on a obtenu la somme de deux processus *MA(∞)* qui est à son tour un processus de moyennes mobiles de retards infinies.

- Les coefficients du processus résultant peuvent être obtenus en sommant les coefficients pour chaque niveau de retards dans les expressions précédentes.

- On verra plus tard dans ce cours une méthode alternative qui est plus facile d'apliquer pour calculer les coefficients du processus *MA(∞)* equivalent du modèle *AR(2).*

Modèle AR(p):

- Un modèle $AR(p)$ est définie par:

$$Y_t=\Phi_1 Y_{t-1}+\Phi_2 Y_{t-2}+\ldots+\Phi_p Y_{t-p}+e_t$$

ou, alternativement, par $\Phi(L)Y_t=e_t$

où $\Phi(L)=1-\Phi_1 L-\Phi_2 L^2-\ldots-\Phi_p L^p$

- Pour que le processus soit stationnaire, il faut que les racines de l'équation polynômiale $1-\Phi_1 L-\Phi_2 L^2-\ldots-\Phi_p L^p=0$ ait des valeurs absolues supérieures à 1.

- Si dans le modèle AR(p) on inclue un terme indépendant:

$$Y_t=\Phi_1 Y_{t-1}+\Phi_2 Y_{t-2}+\ldots+\Phi_p Y_{t-p}+\delta+e_t$$

- Alors sous la supposition de stationnarité, en calculant des espérances du modèle précédent et en prenant $\mu=E(Y_t)$ pour tout t, on a

$$\mu=\Phi_1\mu+ \Phi_2\mu+\ldots+ \Phi_p\mu+ \delta$$

- Donc

$$\mu=\frac{\delta}{1-\Phi_1-\Phi_2-\ldots-\Phi_p}$$

- Par la suite, on supposera, sans perte de généralité, que $\delta=0$.
- Si on multiplie les deux membres du modèles AR(p) par $Y_{t-\tau}$ et en calculant des espérances, on a:

$$\gamma_t=\Phi_1\gamma_{\tau-1}+\Phi_2\gamma_{\tau-2}+\ldots+\Phi_p\gamma_{\tau-p}+E[e_t\,Y_{t-\tau}]$$

- Pour $\tau=0$, on obtient:

$$\gamma_0=\Phi_1\gamma_1+\Phi_2\gamma_2+\ldots+\Phi_p\gamma_p+\sigma_e^2$$

- Pour des valeurs de $\tau>0$, le résultat obtenu sera $\gamma_t=\Phi_1\gamma_{\tau-1}+\Phi_2\gamma_{\tau-2}+\ldots+\Phi_p\gamma_{\tau-p}$ pour $\tau>0$.
- En divisant les deux membres de cette expression par γ_0, on obtient l'équation aux différences d'ordre p relative aux autocorrelations:

$$R_\tau=\Phi_1R_{\tau-1}+\Phi_2R_{\tau-2}+\ldots+\Phi_pR_{\tau-p}$$

- En prenant $R_0,R_1,R_2,\ldots,R_{p-1}$ comme conditions initiales détérminées à partir des coefficients $\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi p$, la solution de l'équation aux différences précédentes permet de calculer les valeurs de R_τ pour $\tau\geq p$.

- Si on prend l'équation aux différences précédentes en particulier pour $\tau=1,2,\ldots,p$ on obtient le système des équations de Yule-Walker:

$$\begin{cases} R_1 = \Phi_1 + \Phi_2 R_1 + \Phi_3 R_2 + \ldots + \Phi_p R_{p-1} \\ R_2 = \Phi_1 R_1 + \Phi_2 + \Phi_3 R_1 + \ldots + \Phi_p R_{p-2} \\ \ldots \\ R_p = \Phi_1 R_{p-1} + \Phi_2 R_{p-2} + \Phi_3 R_{p-3} + \ldots + \Phi_p \end{cases}$$

- La résolution du système de Yule-Walker donne:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & R_1 & \cdots & R_{p-1} \\ R_1 & 1 & \cdots & R_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{p-1} & R_{p-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_p \end{pmatrix}$$

- Si dans le modèle *AR(p)*, on multiplie les deux membres par $\Phi^{-1}(L)$, on obtient:

$$Y_t = \Phi^{-1}(L)e_t = \frac{1}{\Phi(L)}e_t$$

- Ainsi, on a passé d'un modèle *AR(p)* à un modèle *MA(∞)* comme on peut le voir si développe le second membre de la dernière expression, théoriquement d'une forme analogue à celle faite pour le cas du modèle *AR(2)*.