Université Abdelmalek Essaâdi
ENSA de Tétouan

Année universitaire : 2014/2015
1ère année de cycle ingénieur

T.D. de Probabilités et Statistiques
Série n°1

Exercice 1 :

Soient trois urnes d'aspect extérieur identique. La première contient a boules blanches et b noires ; la deuxième, c boules blanches et d noires ; la troisième ne contient que des boules blanches. Une personne s'approche au hasard de l'une des urnes et en tire une boule.
Trouver la probabilité pour que la boule soit blanche.

Exercice 2 :

Soient trois urnes : la première contient a boules blanches et b noires ; la deuxième, c boules blanches et d noires ; la troisième k boules blanches (pas de boules noires). Une personne choisit au hasard une urne et en tire une boule. Cette boule s'est avérée blanche.
Trouver la probabilité pour que cette boule soit tirée : 1°) de la première, 2°) de la deuxième, et 3°) de la troisième urne.

Exercice 3 :

Un appareil se compose de deux ensembles ; le fonctionnement de chacun d'eux est absolument nécessaire pour assurer le service de l'appareil tout entier. La fiabilité (probabilité de fonctionnement sans défaillance pendant un temps t) du premier ensemble est p_1, du deuxième, p_2. L'appareil a été mis à l'essai pendant un temps t, ce qui a permis d'établir qu'il est en panne.
Trouver la probabilité pour que le premier ensemble soit seul à subir une défaillance, alors que le deuxième en bon état.

Exercice 4 :

Soient deux réels $a>0$ et $\alpha>0$. Soit f la fonction définie sur $IR+$ par : pour tout $x \in IR+$,

$$f(x)=\begin{cases} \alpha x & si\ \ 0\le x<\frac{a}{2} \\ \alpha(a-x) & si\ \ \frac{a}{2}\le x<a \\ 0 & si\ \ x\ge a \end{cases}$$

1. Calculer la constante α pour que f soit une densité de probabilité. On choisit dorénavant cette valeur pour α.

2. Soient X une variable aléatoire de densité f et un réel $b\in \left]0,\frac{a}{2}\right[$; calculer les probabilités

$P\left(X>\frac{a}{2}\right)$ et $P\left(\frac{a}{2}-b<X\le\frac{a}{2}+b\right)$.

3. Démontrer que pour tout $b\in \left]0,\frac{a}{2}\right[$, les événements $A=\left(X>\frac{a}{2}\right)$ et $B=\left(\frac{a}{2}-b<X\le\frac{a}{2}+b\right)$ sont indépendants.

Exercice 5 :

On considère les deux fonctions F et H données par :

$$F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{e^{-x}}{2} & si\ \ x\geq 0\\ 0\ \ si\ \ x<0\end{cases} \qquad \textbf{et} \qquad H(y)=\begin{cases}1 & si\ \ y>0\\ 0\ \ si\ \ y\leq 0\end{cases}.$$

Ces fonctions peuvent-elles être des fonctions de répartition de variables aléatoires X et Y, respectivement ?

Exercice 6 :

Une variable aléatoire continue X est de densité de probabilité f définie par : $f(x)=\dfrac{a}{1+x^2}$, pour tout réel x, où a est une constante positive non nulle.

1. Déterminer la constante a.

2. Trouver la fonction de répartition F de la variable X.

3. Trouver la probabilité pour que la variable X tombe dan l'intervalle (-1,1).

4. L'espérance mathématique existe-t-elle pour la variable aléatoire X ?

Exercice 7 :

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de pannes d'un dispositif électronique donné, durant une période donnée. Cette variable aléatoire admet la fonction de répartition suivante :

$$F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{e^{-x}}{2} & si\ \ x\geq 0\\ 0\ \ si\ \ x<0\end{cases}$$

Donner la probabilité :

1. qu'il ne survienne aucune panne,

2. qu'il se produise moins de deux pannes,

3. qu'il se produise plus de 6 pannes,

4. qu'il survienne un nombre de pannes compris entre 1 et 3.

Exercice 8 :

La densité d'une variable aléatoire continue X est f. Trouver la densité h de la variable aléatoire $Y=aX+b$, où $a\neq 0$ et b ne sont pas aléatoires.

Exercice 9 :

Supposons que la variable aléatoire X représente le point donné par un dé. Quelle est la loi de probabilité et la fonction de répartition de la variable $Y=2+X^2$.

Exercice 10 :

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité :

$$f(x)=\begin{cases}0 & si\ \ x\leq 0\\ \dfrac{1}{a} & si\ \ 0<x\leq a\\ 0 & si\ \ x>a\end{cases}$$

Donner les lois de probabilités des variables aléatoires : $Y=X^2$; $Z=\sqrt{X}$.

Exercice 11:

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité f donnée par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2} & si \;\; 0<x<\pi \\ 0 & autrement\end{cases}$$

Donner la densité de probabilité de la variable aléatoire continue $Y=\sin X$.

Exercice 12 :

On dit qu'une variable aléatoire X est distribuée symétriquement autour de a si $P(X\geq a+x)=P(X\leq a-x)$; pour tout x.

Soit X une variable aléatoire distribuée symétriquement autour de a. Montrer que :

1°) Si F est la fonction de répartition de X, on a : $F(a-x)=1-F(a+x)+P(X=a+x)$.

2°) Si f est la fonction de densité de la variable aléatoire continue X, on a : $f(a-x)=f(a+x)$.

3°) $E(X)=a$.