

Chapitre 2: Modèles linéaires (de Box-Jenkins)

1

Plan du chapitre 2:

- Introduction et définitions
- Opérateur retard
- Equations aux différences
- Modèles AR
- Modèles MA
- Modèles ARMA

2

Introduction

- Les processus linéaires est un cas particulier des processus stationnaires et érgodiques.
- Ces processus se caractérisent par le fait qu'ils peuvent se représenter comme combinaison linéaire de variables aléatoires.
- Les types suivants de processus linéaires seront étudiés:

3

Introduction

- Processus purement aléatoires,
- Processus auto-regressifs,
- Processus de moyennes mobiles (*moving-average*)
- et les processus obtenus comme combinaison de ces deux derniers.
- En un premier lieu, on va voir la définition de ces processus, et après pour les analyser, on va les présenter à l'aide des opérateurs et des équations en différences.

4

Bruit blanc:

- Le processus purement aléatoire est le plus simple de tous. Il peut s'exprimer de la forme suivante:

$$Y_t = \varepsilon_t$$

Où ε_t satisfait les propriétés suivantes:

$$E[\varepsilon_t] = 0 \quad \text{pour tout } t$$

$$E[\varepsilon_t]^2 = \sigma^2 \quad \text{pour tout } t$$

$$E[\varepsilon_t \varepsilon_{t'}] = 0 \quad \text{pour } t \neq t'$$

Donc ε_t se caractérise par sa moyenne nulle, par sa variance constante dans le temps et par le fait qu'il n'existe pas de relation entre deux valeurs de la variable prises en deux instants distincts du temps.

5

Bruit blanc:

- Les caractéristiques de ε_t sont identiques à celles qui a la perturbation aléatoire dans le modèle de régression linéaire multiple sous les hypothèses élémentaires.
- Dans la théorie des séries temporelles, on a l'habitude de nommer un processus purement aléatoire par "bruit blanc" (ou "white noise").
- Par la suite, on désignera par ε_t une variable aléatoire qui a les propriétés vues précédemment.

6

Bruit blanc:

- Comme il n'existe pas de relation entre des valeurs prises dans différents instants de temps, le "bruit blanc" est loin du concept intuitive de processus stochastique.
- Autrement dit, pour utiliser des variables aléatoires du type de ε_t , on n'a pas besoin de la théorie des processus stochastique.
- Certes! Mais le "bruit blanc" est indispensable pour l'élaboration des modèles de processus stochastiques très complexes comme les modèles de la classe AR (Auto-regressive) et les modèles de la classe MA (Moyennes mobiles; Moving-average) que nous allons voir.

7

AR(p):

- Le processus auto-regressifs d'ordre p , noté $AR(p)$ s'exprime de la forme suivante:

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Les coefficients Φ_i sont très similaires aux coefficients de régression des modèles de régression multiple.

- L'appellation auto-regressif provient de que Y_t s'obtient par regression sur les valeurs déphasées par rapport à elle.
- Comme on peut le voir, dans un processus $AR(p)$, apparaissent un "bruit blanc" par rapport à l'instant t présent et la variable déphasée pour différents périodes, où p est le retard maximum qui apparaît dans le processus.
- Les processus auto-regressifs ont été introduits pour la première fois par Yule (1927).

8

MA(q):

- Un processus de moyennes mobiles d'ordre q , ou un processus $MA(q)$ est donné par:

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

L'expression de moyennes mobiles fait référence au fait que la variable Y_t s'obtient comme moyenne des variables "bruit blanc" (dans ce cas $q+1$), où les θ_i sont les pondérations. Et comme les variables qui interviennent dans cette moyenne varient dans le temps, elles reçoivent le nom de mobiles.

- C'est aussi Yule (1921, 1926) qui a introduit ce processus.

9

ARMA(p,q):

- Finalement, par une combinaison d'un processus auto-regressif et un processus de moyennes mobiles, on obtient un processus $ARMA(p,q)$, où p indique le retard maximum de la part auto-regressif et q celle des moyennes mobiles.

- L'expression d'un processus $ARMA(p,q)$ est la suivante:

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

- La divulgation et la popularisation de ce type de processus a été fondamentalement faite par Box et Jenkins (1971). Mais, ces processus ont été étudiés auparavant par Wold (1938) et Barlett (1946).

10

Théorème de Wold:

- En 1938, le Pr. Wold donne l'énoncé et la démonstration du théorème suivant:

Un processus stationnaire quelconque Y_t peut être univoquement représenté comme la somme de deux processus mutuellement incorrelés

$$Y_t = D_t + X_t$$

Où D_t est linéairement déterministe et X_t est un processus $MA(\infty)$.

11

Théorème de Wold:

- Contrairement au processus déterministe, X_t est la part des moyennes mobiles ou purement non déterministe.
- La part déterministe D_t peut être une fonction exacte du temps. Par exemple: $D_t = A \cos(\omega t)$ décrivant une oscillation sinusoïdale au cours du temps.
- Le cas le plus simple de D_t consiste à l'égaliser à une constante: $D_t = \mu$.
- Revenant au théorème de Wold, il convient d'appliquer la représentation $Y_t = D_t + X_t$ à n'importe quel processus stationnaire, linéaire ou non.

12

Théorème de Wold: AR(p)+MA(q)=ARMA(p,q):

- Pour des raisons pratiques, on ne peut pas utiliser un *MA* avec retards infinis. Mais, on estime que plusieurs processus stationnaires peuvent être approximés par un *MA* avec un nombre de retards non trop élevés.
- Au lieu d'un *MA*(∞), aussi, on peut utiliser un *AR* ou un *ARMA* fini, comme on va voir le paragraphe suivant.
- On signale que l'on peut confondre, par la suite, les termes "processus" et "modèles" parce que on leur donne, dans ce cours, la même signification.

13

Méthodologie:

- Dans ce chapitre, la méthode utilisée pour exposer les modèles linéaires est la méthode déductive.
- Ainsi, à partir des hypothèses initiales, on obtiendra les propriétés des différents types de modèles.
- La connaissance de ces propriétés va faciliter la réalisation de l'inférence que l'on verra dans la suite du cours.

14

Opérateur retard:

- Soit (Y_t) un processus stochastique. On définit l'opérateur retard "L" tel que:

$$LY_t = Y_{t-1}$$

$$L^2 Y_t = L[LY_t] = LY_{t-1} = Y_{t-2}$$

$$\text{En général: } L^k Y_t = Y_{t-k}$$

- On a aussi, pour c une constante:

$$Lc = c \text{ et } L(cY_t) = cLY_t = cY_{t-1}$$

- $L^k L^s(Y_t) = L^{k+s}(Y_t) = Y_{t-k-s}$

15

Opérateur retard:

- Si $LY_t = Y_{t-1}$, alors $Y_t = L^{-1}Y_{t-1}$.
- L'opérateur retard identique ou unité est $L^0 = I = 1$.
- L'application de l'opérateur retard unité ne change pas la période de référence:

$$L^0 Y_t = Y_t$$

- L'opérateur L peut être utilisé pour exprimer un modèle de retards. Soit, par exemple, le modèle suivant:

$$Y_t - \Phi_1 Y_{t-1} - \Phi_2 Y_{t-2} - \dots - \Phi_p Y_{t-p} = \varepsilon_t$$

16

Opérateur retard:

- Si on applique l'opérateur L , on obtient

$$[1 - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 - \dots - \Phi_p L^p] Y_t = \varepsilon_t$$
- L'expression entre crochets s'appelle "opérateur polynomial des retards" et on le note $\Phi(L)$. La lettre Φ qui précède (L) indique les coefficients qui interviennent dans l'expression de l'opérateur polynomial des retards.
- Donc, on peut écrire: $\Phi(L) Y_t = \varepsilon_t$.
- L'expression $\Phi(L) = 0$, s'appelle équation polynômiale.

17

Modèles auto-regressifs (AR):

- Dans le chapitre précédent, un modèle auto-regressif d'ordre p , ou un modèle $AR(p)$, a été présenté par:

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Où ε_t est une variable "bruit blanc".

- En utilisant l'opérateur polynomial des retards " L ":

$$\Phi(L) = 1 - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 - \dots - \Phi_p L^p$$

- Le modèle peut s'exprimer de forme simplifiée:

$$\Phi(L) Y_t = \varepsilon_t$$

- Par la suite, on va analyser les caractéristiques des modèles $AR(1)$ et $AR(2)$. Les résultats obtenus seront généralisés à un modèle $AR(p)$.

18

Modèle AR(1):

Un modèle $AR(1)$ est donné par:

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Ou, en utilisant l'opérateur retard, par:

$$(1 - \Phi_1 L)Y_t = \varepsilon_t.$$

19

Modèle AR(1):

- Chaque variable "bruit blanc" influe sur les valeurs de Y_i correspondantes à la même période ou sur des périodes postérieures, mais jamais sur des périodes antérieures.



- Une conséquence importante est:

- $E[\varepsilon_t Y_{t-\tau}] = 0$ pour tout $\tau > 0$

20

- La racine de l'équation polynômiale $1 - \Phi_1 L = 0$ est

$$L = \frac{1}{\Phi_1}$$

- Le processus $AR(1)$ est stationnaire si $|L| = \left| \frac{1}{\Phi_1} \right| > 1$
- Donc $AR(1)$ est stationnaire si $|\Phi_1| < 1$.
- Pour analyser le comportement du processus $AR(1)$, on supposera qu'au début le processus commence par la période $-N$.
- Par des substitutions consécutives on aura:

$$Y_t = \Phi_1 [\Phi_1 Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}] + \varepsilon_t = \dots = \sum_{j=0}^{t+N-1} \Phi_1^j \varepsilon_{t-j} + \Phi_1^{t+N} Y_{-N}$$

21

- Si on calcul, alors, les espérances à partir de la dernière expression, on aura:

$$E[Y_t] = \Phi_1^{t+N} Y_{-N}$$

- Où Y_{-N} , qui représente les conditions initiales, a été considérée comme une variable non stochastique. En général, on suppose qu'un processus stochastique commence en une période infiniment petite.
- Si $|\Phi_1| < 1$, alors $E[Y_t] = \Phi_1^{t+N} Y_{-N}$ diminuera en valeur absolue lorsque t augmente.

22

- Lorsque $|\Phi_I| > 1$, alors $E[Y_t] = \Phi_1^{t+N} Y_{-N}$ augmentera en valeur absolue lorsque t augmente à condition que Y_{-N} ne soit pas exactement égale à zéro.
- Si $\Phi_I = 1$, alors on vérifie que $E(Y_t) = Y_{-N}$
- Si $\Phi_I = -1$, alors on aura une alternance de signes dans la valeur de l'espérance.
- Par conséquent, pour un processus qui commence en un instant fini du temps, si la valeur initiale n'est pas nulle, la moyenne de Y_t reste constante seulement lorsque $\Phi_I = 1$.

23

- Mais, si le processus considéré commence en $-\infty$, alors pour $|\Phi_I| < 1$ et pour n'importe quelle valeur initiale, on vérifie que $E[Y_t] = 0$.
- Si on inclut une constante dans le modèle $AR(1)$, on aura $Y_t = \delta + \Phi_I Y_{t-1} + \varepsilon_t$
- Alors, si le processus commence en $-\infty$ et il est stationnaire, on vérifie que la moyenne du processus sera constante pour toute valeur de t : $E[Y_t] = E[Y_{t-1}] = \mu$

24

- En prenant les espérances sur

$Y_t = \delta + \Phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$ et en tenant compte que

$E[Y_t] = E[Y_{t-1}] = \mu$, on obtient que:

$$\mu = \frac{\delta}{1 - \Phi_1}$$

- Dans la suite, on supposera, sans perte de généralité, que $\delta = 0$.
- Un processus initié en $-N$ aura la variance suivante:

$$\gamma_0 = E\left[Y_t - E(Y_t)\right]^2 = E\left[Y_t - \Phi_1^{t+N} Y_{-N}\right]^2$$

25

$$\gamma_0 = E\left[\sum_{j=0}^{t+N-1} \Phi_1^j \varepsilon_{t-j}\right]^2 = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{t+N-1} \Phi_1^{2j}$$

Et par la formule de la somme des termes d'une progression géométrique, on a:

$$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2 \frac{1 - \Phi_1^{2(t+N-1)}}{1 - \Phi_1^2}$$

Finalement, on peut dire que soit dans le cas $\Phi_1 = 1$, ou dans le cas $|\Phi_1| > 1$, la variance trouvée précédemment tend vers l'infini si le processus commence par $-\infty$. Alors, on dit que des processus de ces caractéristiques ont une nature explosive!

26

- Si le processus est stationnaire, c'est-à-dire, si $|\Phi_1| < 1$ et il a commencé en $-\infty$, on vérifie que:

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \Phi_1^2}$$

- Dans ce qui suit, et sauf mention contraire, on supposera que le processus débute par $-\infty$ et qu'il est stationnaire.
- Pratiquement, même si le processus débute par une valeur finie, sa variance se stabilise rapidement au voisinage de

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \Phi_1^2}$$

27

- Si on multiplie les deux membres de $Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$ par $Y_{t-\tau}$, on vérifie que:

$$\gamma_\tau = E[Y_t Y_{t-\tau}] = \Phi_1 E[Y_{t-1} Y_{t-\tau}] + E[\varepsilon_t Y_{t-\tau}]$$

- Pour $\tau > 0$, et comme dans le diagramme des flèches vu précédemment, on vérifie que:

$$\gamma_\tau = \Phi_1 \gamma_{\tau-1} \quad \tau > 0$$

- Cette dernière équation $\gamma_\tau - \Phi_1 \gamma_{\tau-1} = 0$ est une équation aux différences homogène de premier ordre. De même, l'équation $Y_t - \Phi_1 Y_{t-1} = \varepsilon_t$ est une équation aux différences de premier ordre mais non homogène à cause de la présence du "bruit blanc" ε_t .

28

Équations aux différences:

- Soit le modèle suivant:

$$Y_t - \Phi_1 Y_{t-1} - \Phi_2 Y_{t-2} - \dots - \Phi_p Y_{t-p} = \varepsilon_t$$

- Si on applique l'opérateur L , on obtient

$$[1 - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 - \dots - \Phi_p L^p] Y_t = \varepsilon_t$$

- Sachant que $\Phi(L) = 1 - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 - \dots - \Phi_p L^p$

on peut écrire: $\Phi(L) Y_t = \varepsilon_t$

- Cette dernière équation est une équation aux différences non homogène parce que son second membre est non nul, c'est ε_t .

29

Équations aux différences:

- L'ordre de cette équation aux différences est l'ordre de la différence la plus élevée –ou encore, la variable de plus grand retard- qui apparaît dans l'équation.
- Donc l'équation considérée ici est d'ordre p .
- L'équation sans second membre est:

$$Y_t - \Phi_1 Y_{t-1} - \Phi_2 Y_{t-2} - \dots - \Phi_p Y_{t-p} = 0$$

ou encore $\Phi(L) Y_t = 0$ c'est l'équation homogène correspondante.

30

Équations aux différences:

- Résoudre ces équations c'est trouver une expression de Y_t en fonction du temps qui vérifie l'équation.
- Il n'existe pas une solution unique d'une de ces équations.
- Une solution qui englobe toutes les solutions s'appelle la solution complète Y_t^c .
- La solution complète est la somme de deux solutions: la solution générale de l'équation homogène Y_t^h et une solution particulière de l'équation non homogène Y_t^p

$$Y_t^c = Y_t^h + Y_t^p$$

31

Résolution de l'équation homogène:

- La solution générale de l'équation homogène doit être une fonction du temps qui vérifie l'équation

$$Y_t - \Phi_1 Y_{t-1} - \Phi_2 Y_{t-2} - \dots - \Phi_p Y_{t-p} = 0.$$

- Elle dite générale parce qu'elle doit être valide quelques soient les conditions initiales du processus.
- Essayons avec une solution du type: $Y_t = \lambda^t$

32

Résolution de l'équation homogène:

- On la substitue dans l'équation, on obtient:

$$\lambda^t - \Phi_1 \lambda^{t-1} - \dots - \Phi_p \lambda^{t-p} = 0$$

- On factorise par λ^{t-p} , on a:

$$\lambda^{t-p} [\lambda^p - \Phi_1 \lambda^{p-1} - \dots - \Phi_p] = 0$$

- Une solution triviale qui satisfait l'équation antérieure est $\lambda = 0$.

Ou $\lambda^p - \Phi_1 \lambda^{p-1} - \dots - \Phi_p = 0$, équation qui admet p racines qu'on note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ et on l'appelle équation caractéristique.

33

Résolution de l'équation homogène:

- Alternativement, les racines peuvent être obtenues à partir de l'équation polynomiale $\Phi(L) = 0$

$$\text{ou encore } 1 - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 - \dots - \Phi_p L^p = 0$$

qui a p racines notées L_1, L_2, \dots, L_p .

- On peut vérifier que les racines L_i sont exactement les valeurs inverses des racines λ_i .

- En effet, si L_i est une racine, on a:

$$1 - \Phi_1 L_i - \Phi_2 L_i^2 - \dots - \Phi_p L_i^p = 0$$

- D'autre part, et si $\lambda_i = \frac{1}{L_i}$ on a:

$$\left[\frac{1}{L_i} \right]^p - \Phi_1 \left[\frac{1}{L_i} \right]^{p-1} - \dots - \Phi_p = 0$$

34

Résolution de l'équation homogène:

- Si on multiplie les membres de cette équation par L_t^p , on obtient: $1 - \Phi_1 L_t - \Phi_2 L_t^2 - \dots - \Phi_p L_t^p = 0$.
- on a λ_i est une racine de l'équation caractéristique, alors $Y_t = \lambda_i^t$ est une solution de l'équation homogène aux différences. On l'appelle solution basique.
- Deux théorèmes importants s'utilisent pour obtenir la solution générale:

35

Résolution de l'équation homogène:

- **Le premier théorème dit que si λ_i^t est une solution et A_i est une constante arbitraire, alors $Y_t = A_i \lambda_i^t$ est aussi une solution.**
- En effet, en substituant cette valeur dans l'équation $Y_t - \Phi_1 Y_{t-1} - \Phi_2 Y_{t-2} - \dots - \Phi_p Y_{t-p} = 0$ et en factorisant par $A_i \lambda_i^{t-p}$, on obtient:

$$A_i \lambda_i^{t-p} [\lambda_i^p - \Phi_1 \lambda_i^{p-1} - \dots - \Phi_p] = 0$$
 puisque l'expression entre crochets est égale à 0.

36

Résolution de l'équation homogène:

- Par conséquent, $A_1 \lambda_1^t, A_2 \lambda_2^t, \dots, A_m \lambda_m^t$ ou A_1, A_2, \dots, A_m sont des constantes arbitraires, sont aussi des solutions de l'équation homogène. C'est à dire, les multiplications d'une solution basique par une constante arbitraire sont des solutions.
- **Le deuxième théorème dit que si λ_i^t et λ_j^t sont des solutions de l'équation homogène, alors une combinaison linéaire des deux solutions $A_i \lambda_i^t + A_j \lambda_j^t$ est aussi une solution de l'équation homogène.**

37

Résolution de l'équation homogène:

- Cette propriété se vérifie en substituant l'expression antérieure dans l'équation homogène:

$$(A_i \lambda_i^t + A_j \lambda_j^t) - \Phi_1 (A_i \lambda_i^{t-1} + A_j \lambda_j^{t-1}) - \dots - \Phi_p (A_i \lambda_i^{t-p} + A_j \lambda_j^{t-p}) = 0$$
- Puis, on factorise par $A_i \lambda_i^{t-p}$ d'une part et par $A_j \lambda_j^{t-p}$ d'autre part, on obtient:

$$A_i \lambda_i^{t-p} [\lambda_i^p - \Phi_1 \lambda_i^{p-1} - \dots - \Phi_p] + A_j \lambda_j^{t-p} [\lambda_j^p - \Phi_1 \lambda_j^{p-1} - \dots - \Phi_p] = 0$$
Puisque les deux expressions entre crochets sont nulles.

38

Résolution de l'équation homogène:

- Ce deuxième théorème permet d'établir qu'une combinaison linéaire des deux solutions est aussi une solution.
- Précisément, la solution générale de l'équation homogène est composée par les p solutions basiques, multipliées par des constantes arbitraires. C'est à dire:

$$Y_h = Y_t = A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^t + \dots + A_p \lambda_p^t$$

qui est la solution générale de l'équation homogène.

39

Résolution de l'équation homogène:

- Il est intéressant d'analyser le comportement de Y_t lorsque t augmente indéfiniment.
- D'après l'expression précédente de Y_t , on peut remarquer que lorsque $|\lambda_i| < 1, \forall i$, alors lorsque $t \rightarrow \infty$, il arrive que $Y_t \rightarrow 0$ indépendamment des valeurs des constantes arbitraires.
- On dit alors que le système est "stable". Pour les processus stochastiques, on utilise plutôt le terme "stationnaire".
- Une condition nécessaire et suffisante de stabilité ou de stationarité est donc $|\lambda_i| < 1, \forall i$.

40

Résolution de l'équation homogène:

- La solution générale est valable pour n'importe quelles valeurs des constantes arbitraires. Mais en pratique, on leur donne des valeurs obtenues à partir des conditions initiales.
- Ainsi, si on suppose que les valeurs Y_0, Y_1, \dots, Y_{p-1} correspondantes aux périodes $t=0, t=1, \dots, t=p-1$ respectivement, on peut considérer le système de $p-1$ équations suivant:

41

Résolution de l'équation homogène:

$$\begin{cases} Y_0 = A_1 + A_2 + \dots + A_p \\ Y_1 = A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 + \dots + A_p \lambda_p \\ \vdots \\ Y_{p-1} = A_1 \lambda_1^{p-1} + A_2 \lambda_2^{p-1} + \dots + A_p \lambda_p^{p-1} \end{cases}$$

- Dans ce système, les inconnus seront A_1, A_2, \dots, A_p , alors que Y_0, Y_1, \dots, Y_{p-1} et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ seront données.

42

- Revenons au [modèle AR\(1\)](#):
- On a trouvé l'équation $\gamma_\tau = \Phi_1 \gamma_{\tau-1}$ pour $\tau > 0$, ou encore $\gamma_\tau - \Phi_1 \gamma_{\tau-1} = 0$ qui est une équation aux différences homogène de premier ordre.
- Sa solution sera $\gamma_\tau = A \lambda^\tau = \gamma_0 \Phi_1^\tau$
- Si dans l'équation $\gamma_\tau = \Phi_1 \gamma_{\tau-1}$ on divise les deux membres par γ_0 , on obtient:

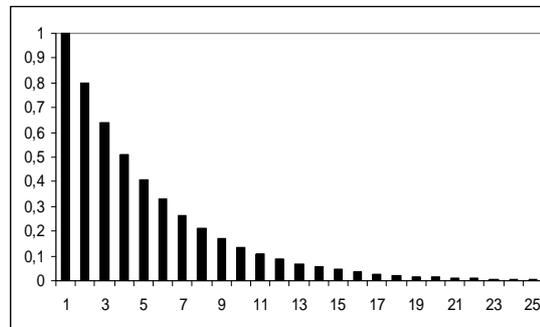
$$R_\tau = \frac{\gamma_\tau}{\gamma_0} = \Phi_1 R_{\tau-1} \quad \text{pour } \tau > 0$$

43

- La solution de l'équation aux différences précédente sera: $R_\tau = \Phi_1^\tau R_0 = \Phi_1^\tau$
- Pour les auto-covariances, la condition initiale est déterminée par la valeur de la variance; par contre pour les auto-correlations, la condition initiale est toujours $R_0 = 1$.
- Représentons le corrélogramme pour $\Phi_1 = 0,8$ et $\Phi_1 = -0,8$ respectivement.

44

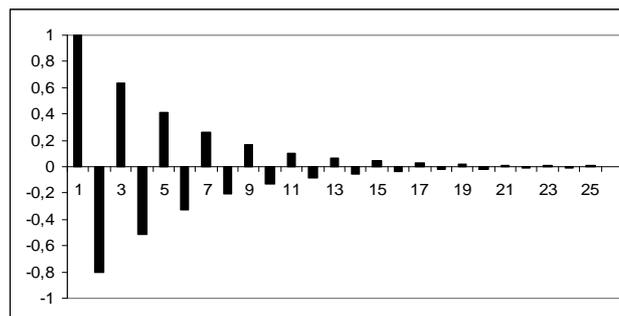
$R_\tau = (0,8)^\tau$ corrélation du Modèle $Y_t = 0,8Y_{t-1} + \varepsilon_t$



Dans le premier cas, le corrélogramme montre une décroissance exponentielle pure.

45

$R_\tau = (-0,8)^\tau$ corrélation du Modèle $Y_t = 0,8Y_{t-1} + \varepsilon_t$



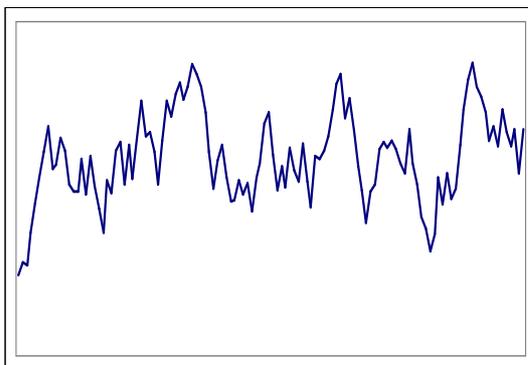
Par contre, lorsque $\Phi_1 = -0,8$ le corrélogramme montre que R suit une décroissance exponentielle, mais avec alternance de signe.

46

- Maintenant, on va présenter les réalisations générées artificiellement à partir des nombres aléatoires pour les modèles $Y_t = 0,8Y_{t-1} + \varepsilon_t$ et $Y_t = -0,8Y_{t-1} + \varepsilon_t$.
- Dans les deux cas, on a pris $Y_0 = 0$ comme valeur initiale.

47

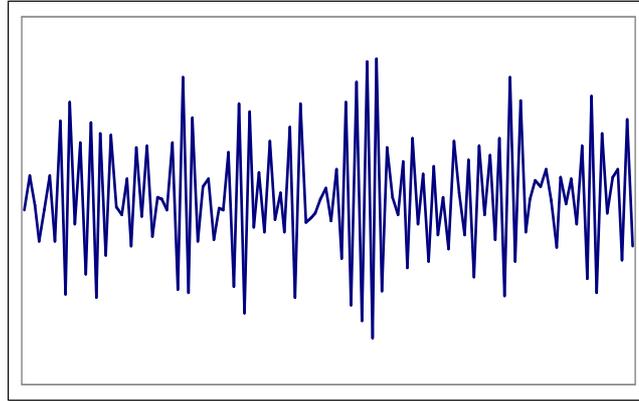
Modèle $Y_t = 0,8Y_{t-1} + \varepsilon_t$



Nombres d'observations: 120

48

Modèle $Y_t = -0,8Y_{t-1} + \varepsilon_t$



Nombres d'observations: 120

49

- Dans un processus $AR(1)$ stationnaire, on peut obtenir Y_t en utilisant l'inverse de l'opérateur polynôme des retards. Ainsi:

$$Y_t = \Phi^{-1}(L)\varepsilon_t = \frac{1}{1 - \Phi_1 L} \varepsilon_t$$

- Évidemment, si on suppose que $|\Phi_1 L| < 1$, la fraction du deuxième membre peut être considérée comme la somme des termes d'une progression géométrique infinie convergente de raison $\Phi_1 L$. C'est à dire:

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} (\Phi_1 L)^j \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_1^j \varepsilon_{t-j}$$

50

- On a vu que par des substitutions consécutives on a:

$$Y_t = \Phi_1[\Phi_1 Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}] + \varepsilon_t = \dots = \sum_{j=0}^{t+N-1} \Phi_1^j \varepsilon_{t-j} + \Phi_1^{t+N} Y_{-N}$$
 par des substitutions indéfinies, on arrive à la même conclusion que

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_1^j \varepsilon_{t-j}$$

- Donc, d'après la terminologie vue dans le chapitre précédent, ce dernier modèle est un modèle de moyennes mobiles avec des retards infinis. Alors, on remarque que l'on a parti d'un modèle $AR(1)$ initial, on a arrivé à un modèle $MA(\infty)$.

51

Modèle AR(2):

- Un modèle $AR(2)$ est donnée par:

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

ou en utilisant l'opérateur des retards:

$$(1 - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2) Y_t = \varepsilon_t$$

- Pour que le processus antérieur soit stationnaire, il faut que les racines de l'équation $1 - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 = 0$ dépassent l'unité.

52

- Si les conditions de stationnarité sont vérifiées -on suppose par la suite qu'elles le sont- on aura $E(Y_t)=0$.
- Si on multiplie les deux membres l'équation $Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$ par $Y_{t-\tau}$ et on prend des esperances, on aura

$$E[Y_t Y_{t-\tau}] = \Phi_1 E[Y_{t-1} Y_{t-\tau}] + \Phi_2 E[Y_{t-2} Y_{t-\tau}] + E[\varepsilon_t Y_{t-\tau}]$$

53

- En tenant compte que

$$E[\varepsilon_t Y_t] = E[\varepsilon_t (\Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t)] = E[\varepsilon_t \varepsilon_t] = \sigma_\varepsilon^2$$
l'expression précédente pour $\tau=0$ donne le résultat suivant:

$$\gamma_0 = \Phi_1 \gamma_1 + \Phi_2 \gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2$$

- Pour des valeurs de $\tau > 0$ on aura

$$\gamma_\tau = \Phi_1 \gamma_{\tau-1} + \Phi_2 \gamma_{\tau-2} \quad \tau > 0$$

L'équation des autocovariances précédente est une équation aux différences homogènes de second ordre.

54

En divisant les deux membres de cette équation par γ_0 , on obtient l'équation aux différences relative aux autocorrelations.

$$R_\tau = \Phi_1 R_{\tau-1} + \Phi_2 R_{\tau-2} \quad \tau > 0$$

sa solution sera de type

$$R_\tau = A_1 \lambda_1^\tau + A_2 \lambda_2^\tau$$

donde $1/\lambda_1$ et $1/\lambda_2$ seront les racines du polynôme caractéristique $1 - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 = 0$

les constantes arbitraires se déterminent à partir des conditions initiales:

$$R_0 = 1 \text{ et } R_1 = \Phi_1 / (1 - \Phi_2).$$

55

- Cette dernière valeur se déduit en faisant $\tau=1$ dans $R_\tau = \Phi_1 R_{\tau-1} + \Phi_2 R_{\tau-2} \quad \tau > 0$.

Donc
$$R_0 = A_1 \lambda_1^0 + A_2 \lambda_2^0 = 1$$

$$R_1 = A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 = \Phi_1 / (1 - \Phi_2)$$

- Si on résoud ce système pour A_1 et A_2 , et en substituant les valeurs obtenues dans sa solution $R_\tau = A_1 \lambda_1^\tau + A_2 \lambda_2^\tau$, on peut appliquer cette formule pour déterminer la valeur de R_τ pour n'importe quelle valeur de $\tau > 0$.

56

- Il faut tenir compte que A_1, A_2, λ_1 et λ_2 ont été calculer a partir de Φ_1 et Φ_2 .
- Maintenant, on peut poser le problème inverse, c'est-à-dire, déterminer Φ_1 et Φ_2 à partir du corrélogramme.
- Dans ce dernier cas, en faisant $\tau=1$ et $\tau=2$ dans l'équation $R_\tau = \Phi_1 R_{\tau-1} + \Phi_2 R_{\tau-2} \quad \tau > 0$, on obtient le système des équations suivant:

$$R_1 = \Phi_1 + \Phi_2 R_1$$

$$R_2 = \Phi_1 R_1 + \Phi_2$$

57

- Le système antérieure s'appelle le système des équations de Yule-Walker.
- Résolvant ce système pour Φ_1 et Φ_2 , on obtient:

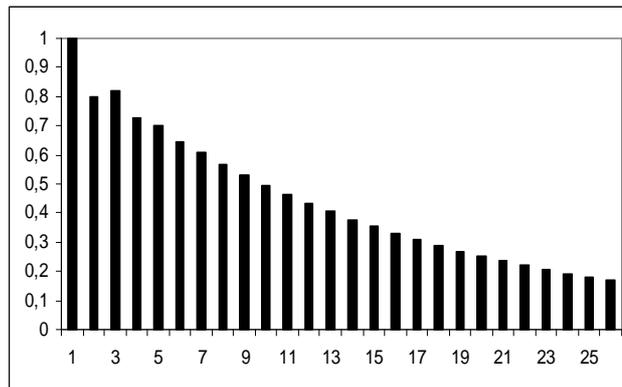
$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & R_1 \\ R_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$$

- Représentons le corrélogramme pour quatre modèles AR(2).

58

Corrélogramme pour le modèle:

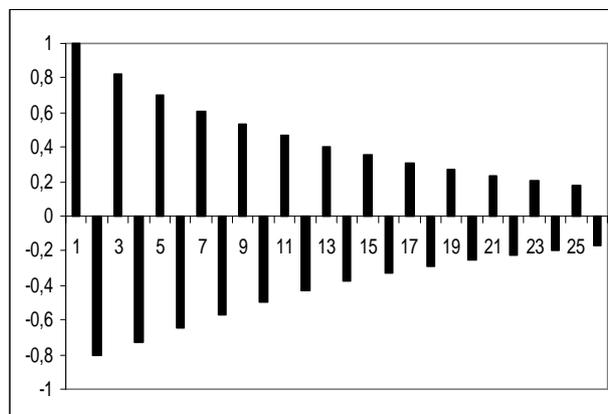
$Y_t = 0,4Y_{t-1} + 0,5Y_{t-2} + \varepsilon_t$. Où on a pris $R_0 = 1$,
 $R_1 = 0,4/0,5$ et $R_t = 0,4R_{t-1} + 0,5R_{t-2}$ pour $t > 1$



59

Corrélogramme pour le modèle:

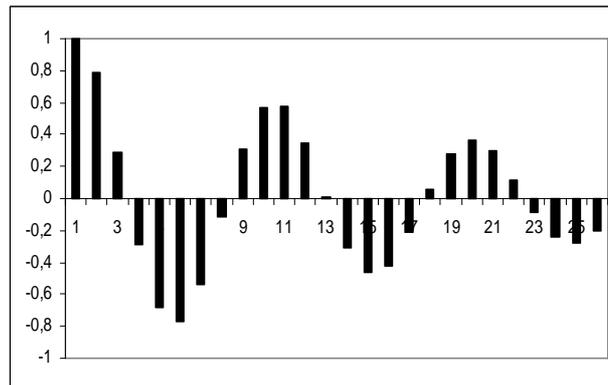
$Y_t = -0,4Y_{t-1} + 0,5Y_{t-2} + \varepsilon_t$. Où on a pris $R_0 = 1$, $R_1 = -$
 $0,4/0,5$ et $R_t = -0,4R_{t-1} + 0,5R_{t-2}$ pour $t > 1$



60

Corrélogramme pour le modèle:

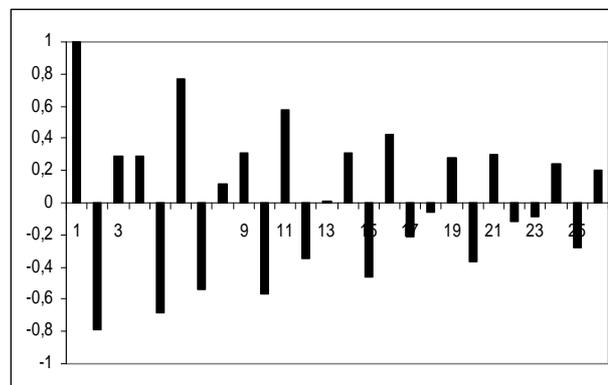
$Y_t = 1,5Y_{t-1} - 0,9Y_{t-2} + \varepsilon_t$. Où on a pris $R_0 = 1$,
 $R_1 = 1,5/1,9$ et $R_t = 1,5R_{t-1} - 0,9R_{t-2}$ pour $t > 1$



61

Corrélogramme pour le modèle:

$Y_t = -1,5Y_{t-1} - 0,9Y_{t-2} + \varepsilon_t$. Où on a pris $R_0 = 1$,
 $R_1 = -1,5/1,9$ et $R_t = -1,5R_{t-1} - 0,9R_{t-2}$ pour $t > 1$

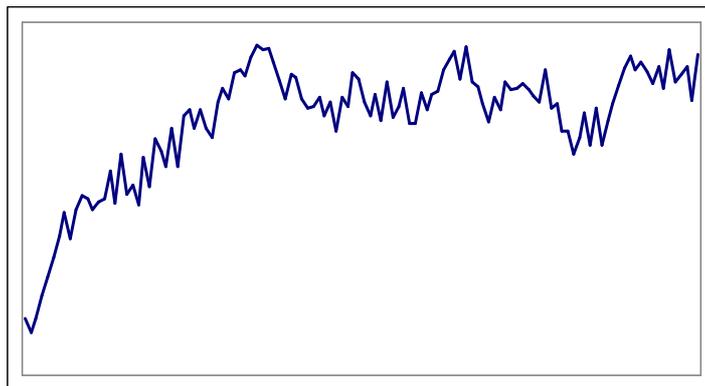


62

- Maintenant, on va présenter les réalisations générée artificiellement à partir des nombres aléatoires pour tous ces modèles AR(2).
- Dans les quatre cas, on a pris $Y_0=0$ et $Y_1=0$ comme valeurs initiales.

63

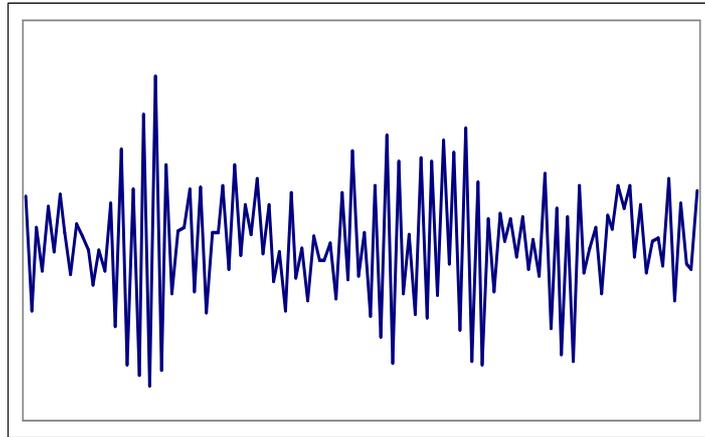
Réalisations du modèle: $Y_t=0,4Y_{t-1}+0,5Y_{t-2}+\varepsilon_t$



Nombres d'observations: 120

64

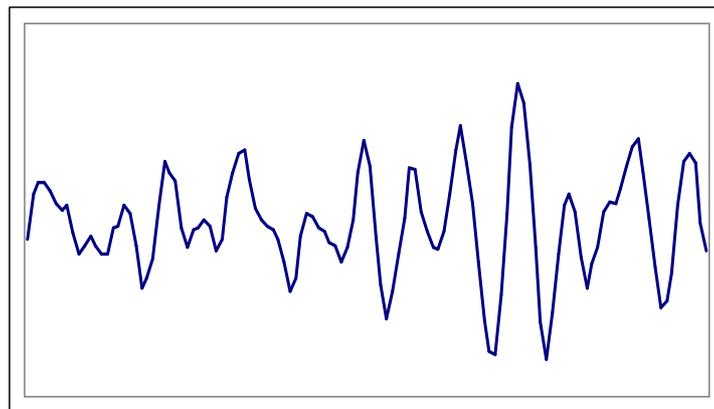
Réalisations du modèle: $Y_t = -0,4Y_{t-1} + 0,5Y_{t-2}$



Nombres d'observations: 120

65

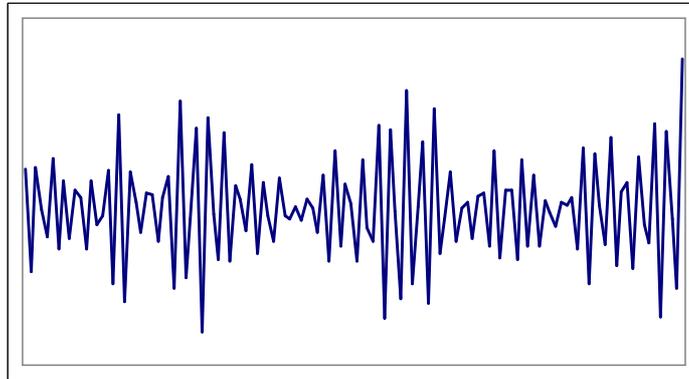
Réalisations du modèle: $Y_t = 1,5Y_{t-1} - 0,9Y_{t-2}$



Nombres d'observations: 120

66

Réalisations du modèle: $Y_t = -1,5Y_{t-1} - 0,9Y_{t-2}$



Nombres d'observations: 120

67

- En un processus $AR(2)$, et en utilisant l'inverse de l'opérateur polynomiale des retards, on peut obtenir Y_t :

$$Y_t = \Phi^{-1}(L)e_t = \frac{1}{1 - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2} e_t$$

- Si $1/\lambda_1$ et $1/\lambda_2$ sont les racines du polynôme caractéristique $1 - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 = 0$, on peut factoriser le dénominateur de l'expression précédente:

$$Y_t = \frac{1}{(1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L)} \varepsilon_t$$

68

- Par développement en fractions rationnelles, on aura:

$$\frac{1}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)} = \frac{A}{1-\lambda_1 L} + \frac{B}{1-\lambda_2 L}$$

- A et B sont des constantes que l'on détermine de la façon suivante:

$$1 = (1-\lambda_2 L)A + (1-\lambda_1 L)B = (A+B) + (-\lambda_2 A - \lambda_1 B)L$$

- Par identification on aura:

$$\begin{aligned} A+B &= 1 \\ -\lambda_2 A - \lambda_1 B &= 0 \end{aligned}$$

69

- La solution du système précédente donne:

$$A = \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \quad \text{et} \quad B = \frac{-\lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)}$$

- Par conséquent, on obtient:

$$\begin{aligned} Y_t &= \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{1}{1 - \lambda_1 L} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{1}{1 - \lambda_2 L} \right] e_t \\ &= \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_1 L)^j - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_2 L)^j \right] e_t \end{aligned}$$

70

- Ainsi, on a obtenu la somme de deux processus $MA(\infty)$ qui est à son tour un processus de moyennes mobiles de retards infinies.
- Les coefficients du processus résultant peuvent être obtenus en sommant les coefficients pour chaque niveau de retards dans les expressions précédentes.
- On verra plus tard dans ce cours une méthode alternative qui est plus facile d'appliquer pour calculer les coefficients du processus $MA(\infty)$ équivalent du modèle $AR(2)$.

71

Modèle AR(p):

- Un modèle $AR(p)$ est définie par:

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

ou, alternativement, par $\Phi(L)Y_t = \varepsilon_t$

où $\Phi(L) = 1 - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 - \dots - \Phi_p L^p$

- Pour que le processus soit stationnaire, il faut que les racines de l'équation polynômiale $1 - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 - \dots - \Phi_p L^p = 0$ ait des valeurs absolues supérieures à 1.

72

- Si dans le modèle AR(p) on inclue un terme indépendant:

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + \delta + \varepsilon_t$$

- Alors sous la supposition de stationnarité, en calculant des espérances du modèle précédent et en prenant $\mu = E(Y_t)$ pour tout t , on a

$$\mu = \Phi_1 \mu + \Phi_2 \mu + \dots + \Phi_p \mu + \delta$$

- Donc

$$\mu = \frac{\delta}{1 - \Phi_1 - \Phi_2 - \dots - \Phi_p}$$

73

- Par la suite, on supposera, sans perte de généralité, que $\delta = 0$.
- Si on multiplie les deux membres du modèles AR(p) par $Y_{t-\tau}$ et en calculant des espérances, on a:

$$\gamma_t = \Phi_1 \gamma_{t-1} + \Phi_2 \gamma_{t-2} + \dots + \Phi_p \gamma_{t-p} + E[\varepsilon_t Y_{t-\tau}]$$

- Pour $\tau = 0$, on obtient:

$$\gamma_0 = \Phi_1 \gamma_1 + \Phi_2 \gamma_2 + \dots + \Phi_p \gamma_p + \sigma_\varepsilon^2$$

74

- Pour des valeurs de $\tau > 0$, le résultat obtenu sera $\gamma_\tau = \Phi_1 \gamma_{\tau-1} + \Phi_2 \gamma_{\tau-2} + \dots + \Phi_p \gamma_{\tau-p}$ pour $\tau > 0$.
- En divisant les deux membres de cette expression par γ_0 , on obtient l'équation aux différences d'ordre p relative aux autocorrelations:

$$R_\tau = \Phi_1 R_{\tau-1} + \Phi_2 R_{\tau-2} + \dots + \Phi_p R_{\tau-p}$$

- En prenant $R_0, R_1, R_2, \dots, R_{p-1}$ comme conditions initiales déterminées à partir des coefficients $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p$, la solution de l'équation aux différences précédentes permet de calculer les valeurs de R_τ pour $\tau \geq p$.

75

- Si on prend l'équation aux différences précédentes en particulier pour $\tau = 1, 2, \dots, p$ on obtient le système des équations de Yule-Walker:

$$\begin{cases} R_1 = \Phi_1 + \Phi_2 R_1 + \Phi_3 R_2 + \dots + \Phi_p R_{p-1} \\ R_2 = \Phi_1 R_1 + \Phi_2 + \Phi_3 R_1 + \dots + \Phi_p R_{p-2} \\ \dots \\ R_p = \Phi_1 R_{p-1} + \Phi_2 R_{p-2} + \Phi_3 R_{p-3} + \dots + \Phi_p \end{cases}$$

76

- La résolution du système de Yule-Walker donne:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & R_1 & \cdots & R_{p-1} \\ R_1 & 1 & \cdots & R_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{p-1} & R_{p-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_p \end{pmatrix}$$

77

- Si dans le modèle $AR(p)$, on multiplie les deux membres par $\Phi^{-1}(L)$, on obtient:

$$Y_t = \Phi^{-1}(L)\varepsilon_t = \frac{1}{\Phi(L)}\varepsilon_t$$

- Ainsi, on a passé d'un modèle $AR(p)$ à un modèle $MA(\infty)$ comme on peut le voir si développe le second membre de la dernière expression, théoriquement d'une forme analogue à celle faite pour le cas du modèle $AR(2)$.

78

Modèles de moyennes mobiles

- Un modèle de moyennes mobiles d'ordre q , que l'on note MA(q), est donné par:

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

où les pondérations θ_i sont affectées par un signe "moins" pour raison de convention de notation.

- En utilisant l'opérateur polynomial de retards

$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q$$

79

- Le modèle de moyennes mobiles dans sa forme réduite:

$$Y_t = \theta(L) \varepsilon_t$$

- Dans ce modèle, la moyenne est nulle, quelques soient les valeurs de θ_i .
- En effet,

$$E[Y_t] = \theta(L) E[\varepsilon_t] = 0$$

80

- Si dans le modèle $Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$ on inclue un terme constant

$$Y_t = \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

- Alors, si on applique l'espérance mathématique à l'expression précédente, on obtient:

$$E[Y_t] = \delta$$

Donc, dans les modèles de moyennes mobiles, la moyenne du processus coïncide avec le terme indépendant δ .

81

- Sans perte de généralité, on supposera dans la suite que $\delta = 0$.
- Maintenant, on va étudier les propriétés d'un MA(1) et d'un MA(2), pour les généraliser ensuite à un MA(q).

Modèle MA(1):

Un modèle MA(1) est donné par

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} = (1 - \theta_1 L) \varepsilon_t$$

Si on multiplie les deux membres par ce modèle par $Y_{t-\tau}$, et si on calcul des espérances mathématiques, on obtient:

82

$$E[Y_t Y_{t-\tau}] = E[\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}] [\varepsilon_{t-\tau} - \theta_1 \varepsilon_{t-\tau-1}]$$

- On peut voir que pour $\tau=0$, en tenant compte que $E[\varepsilon_t \varepsilon_{t'}] = 0$ pour $t \neq t'$, on a

$$\gamma_0 = E[Y_t]^2 = E[\varepsilon_t^2 + \theta_1^2 \varepsilon_{t-1}^2 - 2\theta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}] = [1 + \theta_1^2] \sigma_\varepsilon^2$$

- Pour $\tau=1$

$$\gamma_1 = E[\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}] [\varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2}] = -\theta_1 \sigma_\varepsilon^2$$

- Pour les valeurs de $\tau > 1$, on déduit que

$$\gamma_\tau = 0 \quad \tau > 1$$

83

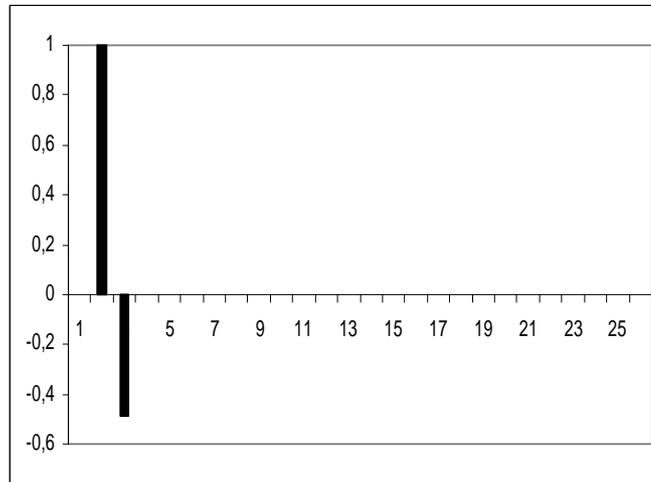
- Si on divise par γ_0 les deux membres des deux expressions précédentes, on obtient les coefficients d'autocorrelation:

$$R_1 = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} \quad \tau = 1$$

$$R_\tau = 0 \quad \tau > 1$$

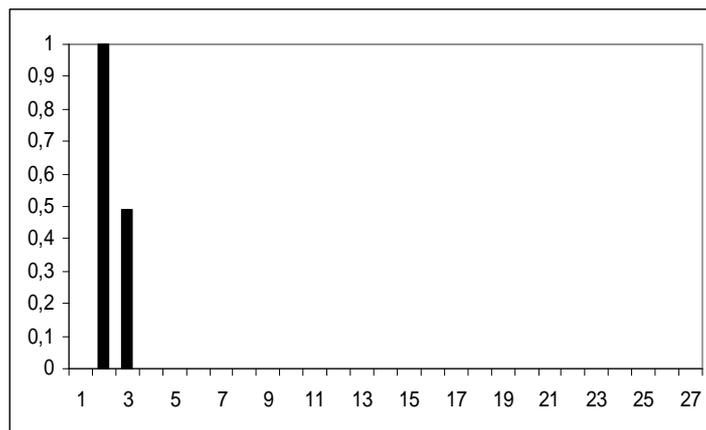
Représentons le corrélogramme d'un modèle MA(1) pour les valeurs du paramètre $\theta_1 = 0,8$ et $\theta_1 = -0,8$.

84



$$Y_t = \varepsilon_t - 0,8 \varepsilon_{t-1}$$

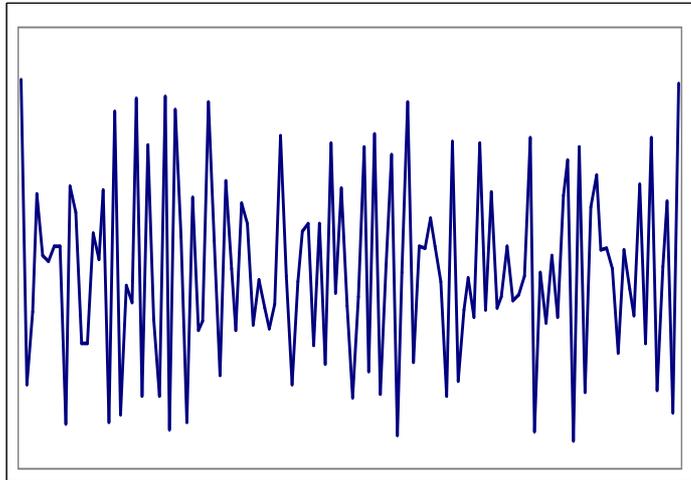
85



$$Y_t = \varepsilon_t + 0,8 \varepsilon_{t-1}$$

86

De même, on représente les réalisations correspondantes au modèle $Y_t = \varepsilon_t - 0,8 \varepsilon_{t-1}$

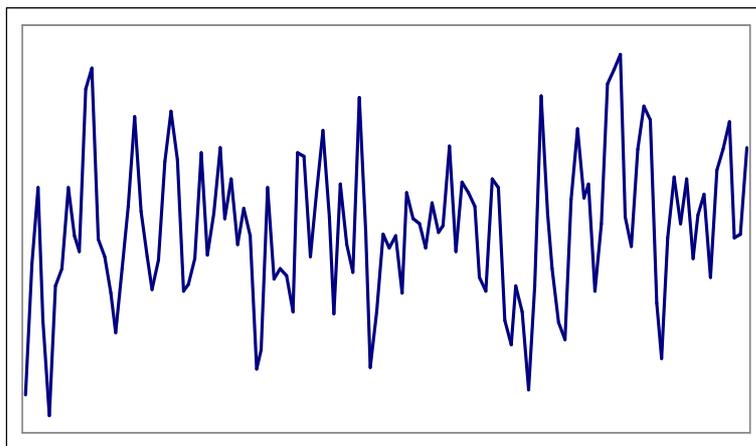


Nombres d'observations: 120

87

et les réalisations correspondantes au modèle

$$Y_t = \varepsilon_t + 0,8 \varepsilon_{t-1}$$



88

- Un modèle MA(1) est toujours stationnaire indépendamment de la valeur prise par le paramètre θ_1 .

- Si le modèle MA(1) est exprimé ainsi:

$$\varepsilon_t = Y_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

et si on effectue des substitutions successives, alors:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= Y_t + \theta_1 [Y_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2}] = \\ &\dots\dots\dots \\ &= Y_t + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_1^2 Y_{t-2} + \dots + \theta_1^N Y_{t-N} + \theta_1^{N+1} \varepsilon_{t-N-1} \end{aligned}$$

89

- Si $|\theta_1| < 1$, le dernier terme de la dernière expression a moins de poids à mesure que N soit plus grande, et en plus le poids de chaque Y_t retardée décroît à mesure que le nombre de retards croît.

- Par conséquent, sous cette condition, un modèle MA(1) peut s'écrire:

$$\varepsilon_t = Y_t + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_1^2 Y_{t-2} + \dots$$

Ainsi, on a passé d'un modèle MA(1) à un AR(∞).

90

- La condition qui nous a permis de passer d'un modèle à un autre, c'est-à-dire la condition d'inversibilité, est $|\theta_1| < 1$.
- Aussi, lorsque $|\theta_1| < 1$, on aura pu écrire:

$$Y_t = (1 - \theta_1 L) \varepsilon_t$$

ou encore

$$\varepsilon_t = \frac{1}{1 - \theta_1 L} Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} (\theta_1 L)^j Y_t$$

Donc

$$\varepsilon_t = Y_t + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_1^2 Y_{t-2} + \dots$$

91

- L'équation $Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ peut être considérée comme une équation aux différences en ε_t (Y_t sera dans ce cas la partie non homogène).
- Pour que cette équation soit stable, il faut que la racine du polynôme caractéristique $1 - \theta_1 L = 0$ soit en dehors du cercle unité, c'est-à-dire que

$$|L| = \left| \frac{1}{\theta_1} \right| > 1$$

ou encore $|\theta_1| < 1$.

92

- Comme on peut voir, la condition d'inversibilité d'un modèle MA(1) est équivalente, dans le sens formel, à la condition de stationnarité d'un modèle AR(1).
- Nous répétons qu'un modèle MA(1) est toujours stationnaire et que la condition d'inversibilité n'est là que pour nous permettre de passer à un modèle AR(∞).

93

Modèle MA(2)

- Un modèle MA(2) est donné par

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2) \varepsilon_t$$

- Si on multiplie les deux membres par de ce modèle par $Y_{t-\tau}$, et si on calcul des espérances mathématiques, on obtient:

$$E[Y_t Y_{t-\tau}] = E[\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}] [\varepsilon_{t-\tau} - \theta_1 \varepsilon_{t-\tau-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-\tau-2}]$$

94

- Pour différentes valeurs de τ , on obtient les résultats suivants:

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \sigma_\varepsilon^2 \quad \tau = 0$$

$$\gamma_1 = (-\theta_1 + \theta_1 \theta_2) \sigma_\varepsilon^2 \quad \tau = 1$$

$$\gamma_2 = (-\theta_1) \sigma_\varepsilon^2 \quad \tau = 2$$

$$\gamma_\tau = 0 \quad \tau > 2$$

95

A partir des expressions précédentes, on obtient facilement les coefficients d'autocorrelation:

$$R_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$R_2 = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$R_\tau = 0 \quad \tau > 2$$

96

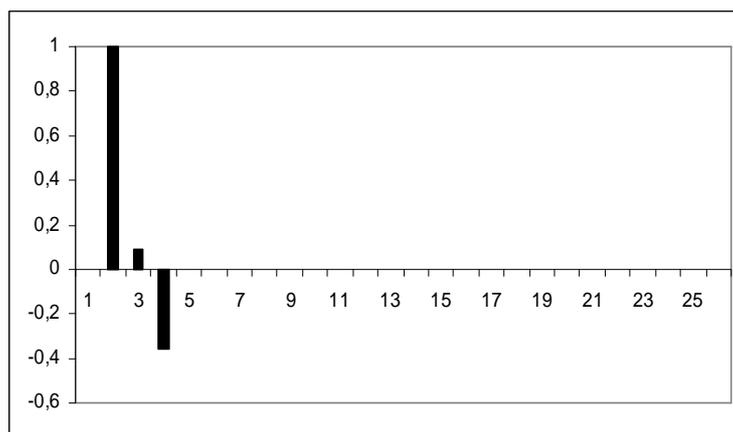
- Pour qu'un processus MA(2) soit inversible, il faut que les racines du polynôme caractéristique:

$$1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 = 0$$

soient en dehors du cercle unité.

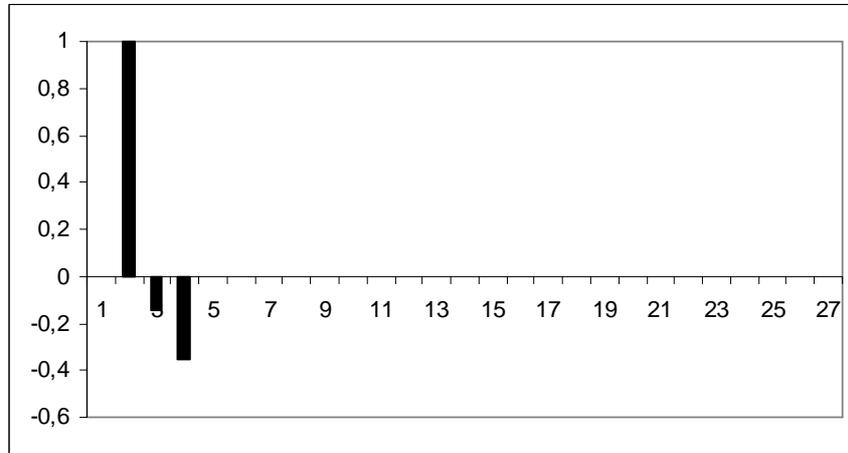
- Par la suite on va représenter les corrélogrammes et les réalisations correspondentes à quatre modèles MA(2) inversibles.

97



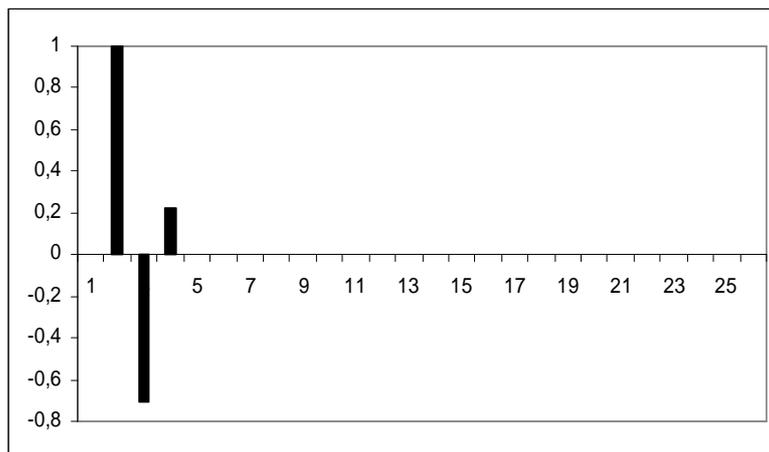
$$Y_t = \varepsilon_t + 0,4\varepsilon_{t-1} - 0,5\varepsilon_{t-2}$$

98



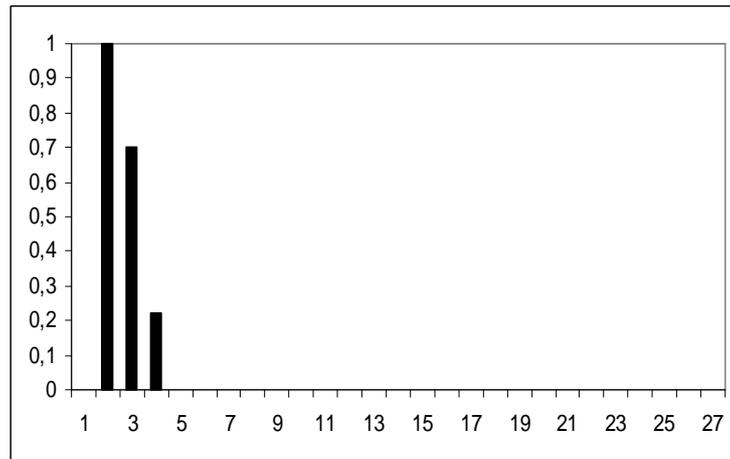
$$Y_t = \varepsilon_t - 0,4\varepsilon_{t-1} - 0,5\varepsilon_{t-2}$$

99



$$Y_t = \varepsilon_t - 1,5\varepsilon_{t-1} + 0,9\varepsilon_{t-2}$$

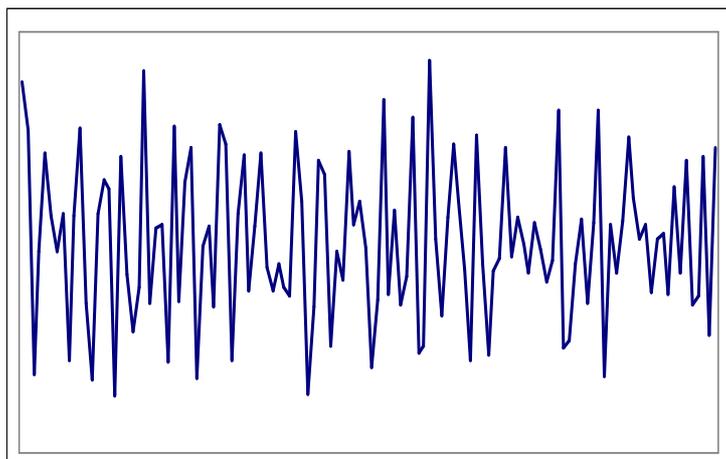
100



$$Y_t = \varepsilon_t + 1,5\varepsilon_{t-1} + 0,9\varepsilon_{t-2}$$

101

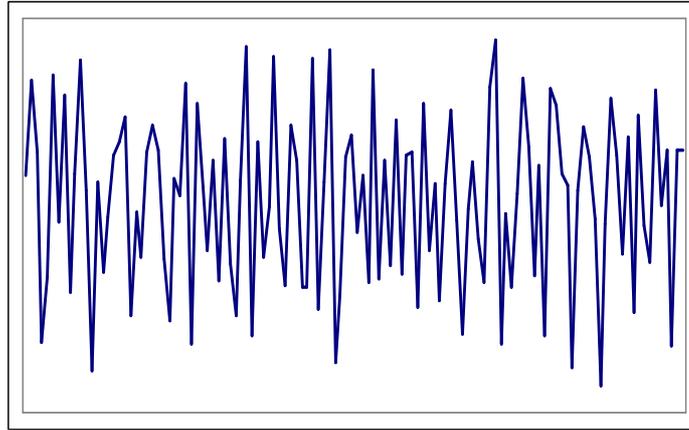
$$Y_t = \varepsilon_t + 0,4\varepsilon_{t-1} - 0,5\varepsilon_{t-2}$$



Nombres d'observations: 120

102

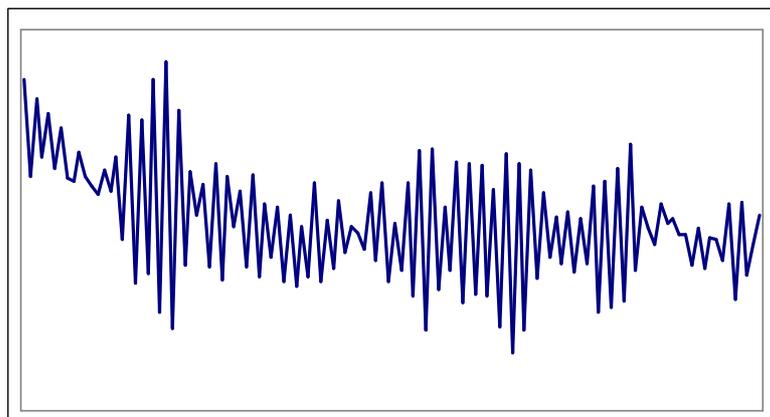
$$Y_t = \varepsilon_t - 0,4\varepsilon_{t-1} - 0,5\varepsilon_{t-2}$$



Nombres d'observations: 120

103

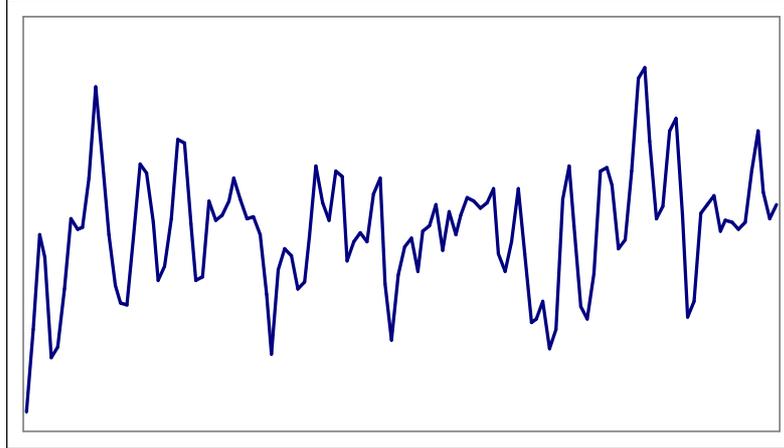
$$Y_t = \varepsilon_t - 1,5\varepsilon_{t-1} + 0,9\varepsilon_{t-2}$$



Nombres d'observations: 120

104

$$Y_t = \varepsilon_t + 1,5\varepsilon_{t-1} + 0,9\varepsilon_{t-2}$$



Nombres d'observations: 120

105