Université Abdelmalek Essaâdi
ENSA de Tétouan

Année universitaire : 2014/2015
1ère année de cycle ingénieur

Contrôle Continu N°1
de Probabilités, Statistiques et Calcul Stochastique
Durée : 2 heures

Exercice 1 : (4 points)

Une urne U_1 contient b_1 boules blanches et n_1 boules noires. Une urne U_2 contient b_2 boules blanches et n_2 boules noires. On tire, au hasard, une boule de U_1 et on la transfère dans U_2. On tire, alors, au hasard une boule de U_2.

1°) Quelle est la probabilité pour que la boule tirée de U_2 soit blanche ?

2°) On constate qu'effectivement la boule tirée de U_2 est blanche. Quelle est la probabilité pour que la boule transférée fût noire?

Exercice 2 : (8 points)

Soit Y une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$ et de densité de probabilité g donnée par :

$$g(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y} & si \ \ y\geq 0\\ 0 & si \ \ y<0\end{cases}$$

On considère X la variable aléatoire continue telle que $X=e^Y$.

1°) Déterminer la fonction de densité f de la variable aléatoire X.

2°) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

3°) Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de X lorsqu'elle existe.

4°) Évaluer $E(X^k)$ pour tout $k\geq 1$. En déduire que la variable aléatoire X n'admet pas de fonction génératrice des moments.

Exercice 3 : (8 points)

1°) Soit T une variable aléatoire continue qui suit une loi normale centrée réduite de densité de probabilité :

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}; \qquad t\in IR$$

Déterminer sa fonction génératrice des moments $M_T(t)$.

2°) On considère la variable aléatoire $Z=T^2$. Déterminer la fonction génératrice des moments $M_Z(t)$ de la variable Z. En déduire l'espérance mathématique $E(Z)$ et la variance $Var[Z]$ de la variable aléatoire Z.

3°) Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi normale $N(\mu,\sigma)$ de fonction de densité de probabilité :

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; \qquad x\in IR$$

Déterminer sa fonction génératrice des moments $M_X(t)$.

4°) Soient X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes suivant des lois normales $N(\mu_1,\sigma_1)$ et $N(\mu_2,\sigma_2)$ respectivement. Montrer, en utilisant la fonction génératrice des moments, que la v.a. $Y=X_1+X_2$ suit alors une loi normale $N\left(\mu_1+\mu_2,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$.

Bonne chance !

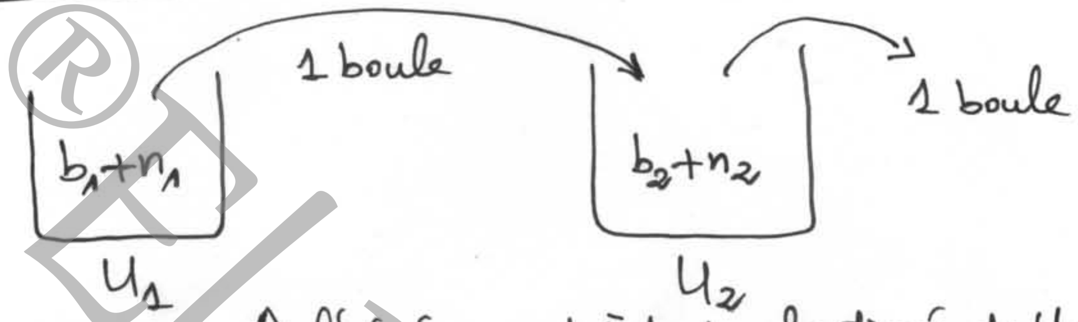
ENSA de Tétouan

2014/2015

CC1

Corrigés du contrôle continu n° 1
Probabilités, statistiques et calcul stochastique

Exercice 1:



1°) Désignons par : A l'événement "la boule tirée de U_2 est blanche"

B_1, l'événement "la boule transférée est blanche"

et par B_2, l'événement "la boule transférée est noire".

On a :
$$P(B_1) = \frac{b_1}{b_1+n_1} \quad ; \quad P(B_2) = \frac{n_1}{b_1+n_1}$$

Par la formule des probabilités totales:
$$P(A) = P(A/B_1)\cdot P(B_1) + P(A/B_2)\cdot P(B_2)$$
$$= \frac{b_2+1}{b_2+n_2+1}\cdot\frac{b_1}{b_1+n_1} + \frac{b_2}{b_2+n_2+1}\cdot\frac{n_1}{b_1+n_1}$$

d'où
$$\boxed{P(A) = \frac{b_2(b_1+n_1)+b_1}{(b_1+n_1)(b_2+n_2+1)}}$$

2°) La formule de Bayes nous permet d'écrire :
$$P(B_2/A) = \frac{P(A/B_2)\cdot P(B_2)}{P(A)} = \frac{P(A/B_2)\cdot P(B_2)}{\sum_{i=1}^{2} P(A/B_i)P(B_i)}$$

ce qui donne
$$\boxed{P(B_2/A) = \frac{n_1 b_2}{n_1 b_2 + b_1(b_2+1)}}$$

Exercice 2 :

$$X = e^Y$$

1°) La transformation considérée ici est l'exponentielle qui est une fonction strictement croissante, alors on peut appliquer la formule $f(x) = g(\log x)\left|\frac{1}{x}\right|$

donc $f(x) = \dfrac{\lambda e^{-\lambda \log x}}{x}$ pour $\underline{\underline{x \geq 1}}$

d'où $\boxed{f(x) = \dfrac{\lambda}{x^{\lambda+1}} \text{ pour } x \geq 1 \text{ et } f(x) = 0 \text{ si } x < 1.}$

2°) On a : $F(x) = P(X \leq x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{1}^{x} \frac{\lambda\,dt}{t^{\lambda+1}} = 1 - x^{-\lambda}$

pour $x \geq 1$

et $F(x) = 0$ si $x < 1$

D'où $\boxed{F(x) = \begin{cases} 1 - x^{-\lambda} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}}$

3°) $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{\lambda x}{x^{\lambda+1}}\,dx = \frac{\lambda}{1-\lambda}\left[x^{1-\lambda}\right]_1^{+\infty}$

$E(X) = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}$ si $\lambda > 1$

Pour $\lambda \leq 1$, $E(X)$ n'existe pas.

4°) Soit $k \geq 1$; $E(X^k) = \lambda \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x^k}{x^{\lambda+1}}\,dx = \frac{\lambda}{k-\lambda}\left[x^{k-\lambda}\right]_1^{+\infty}$

$= \dfrac{\lambda}{\lambda - k}$ si $k < \lambda$.

Donc pour $k \geq \lambda$; $E(X^k)$ n'existe pas.

la fonction génératrice des moments s'écrit:

$$M(t) = M(0) + M'(0)t + M''(0)\frac{t^2}{2} + \dots + M^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} + \dots$$
$$= M(0) + E(X)t + E(X^2)\frac{t^2}{2} + \dots + E(X^k)\frac{t^k}{k!} + \dots$$

D'où $M(t)$ n'existe pas parce que pour $k \geq \lambda$,
$E(X^k)$ n'existe pas.

Exercice 3:

1°) Soit $T \sim N(0,1)$

$$M_T(t) = E(e^{tT}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}+tx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2tx+t^2)+\frac{t^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} e^{\frac{t^2}{2}} dx$$

Posons $x - t = u$, alors $dx = du$, d'où

$$M_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \cdot e^{\frac{t^2}{2}} = e^{\frac{t^2}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du\right]$$

or $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1$, donc $\underline{M_T(t) = e^{\frac{t^2}{2}}}$; $\underline{\forall t \in \mathbb{R}}$

2°) $Z = T^2$; $M_Z(t) = E(e^{tZ}) = E(e^{tT^2})$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx^2} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(tx^2-\frac{1}{2}x^2)} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(1-2t)x^2} dx$$

Si $1-2t>0$ alors $t<\frac{1}{2}$

posons $u=x\sqrt{1-2t}$ d'où $du=\sqrt{1-2t}\,dx$, on a alors

$$M_Z(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}u^2}\frac{du}{\sqrt{1-2t}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-2t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-2t}}$$

Donc $\boxed{M_Z(t)=(1-2t)^{-\frac{1}{2}}\ ;\ \forall t\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[}$

calcul de $E(Z)$ et $Var(Z)$:

On sait que $E(Z)=M_Z'(0)$; $Var(Z)=M_Z''(0)-\left(M_Z'(0)\right)^2$

$$M_Z'(t)=-\frac{1}{2}(1-2t)^{-\frac{3}{2}}(-2)=(1-2t)^{-3/2}$$

$$M_Z''(t)=-\frac{3}{2}(1-2t)^{-5/2}(-2)=3(1-2t)^{-5/2}$$

$M_Z'(0)=1=E(Z)$

$M_Z''(0)=3=E(Z^2)$; d'où $Var(Z)=3-1=2$

$\boxed{E(Z)=1}$ et $\boxed{Var(Z)=2}$

3°) Soit $X\sim N(\mu,\sigma)$ et on a: $T\sim N(0,1)$; $T=\frac{X-\mu}{\sigma}$

$$M_X(t)=E(e^{tX})=E\left[e^{t(\sigma T+\mu)}\right]=e^{t\mu}E\left(e^{(t\sigma)T}\right)$$

Alors, d'après 1°), on aura:

$$M_X(t)=e^{t\mu}e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}\quad \text{car } M_T(t)=e^{\frac{t^2}{2}}\ \forall t\in\mathbb{R}$$

d'où $\boxed{M_X(t)=e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}}$ $\forall t\in\mathbb{R}$

4°) on a: $M_Y(t)=E\left(e^{tY}\right)=E\left(e^{t(X_1+X_2)}\right)=E\left[e^{tX_1+tX_2}\right]$

$$=E\left[e^{tX_1}\cdot e^{tX_2}\right]$$

Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, on peut écrire:

$$M_Y(t) = E\left[e^{tX_1}\right] . E\left[e^{tX_2}\right] = M_{X_1}(t) . M_{X_2}(t)$$

$$= e^{t\mu_1 + \frac{t^2\sigma_1^2}{2}} . e^{t\mu_2 + \frac{t^2\sigma_2^2}{2}} \quad \text{(d'après 3°))}$$

$$= e^{t(\mu_1+\mu_2) + \frac{t^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{2}}$$

qui est la fonction génératrice d'une loi $N\left(\mu_1+\mu_2, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$