Université Abdelmalek Essaâdi **Année universitaire : 2014/2015**
ENSA de Tétouan **1ère année de cycle ingénieur**

Rattrapage de Probabilités, Statistiques et Calcul Stochastique

Durée : 2 heures

Exercice 1 : (6 points)

1°) Soit X une v.a. telle que $E(X)=\mu$ et $Var(X)=\sigma^2$ existent. Monter que pour tout réel $\varepsilon>0$ on a :

$$P(|X-\mu|\geq\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$ (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

2°) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(E[X_n])=\mu$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(Var[X_n])=0$

Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers μ.

3°) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, ayant des moments d'ordre 2 finis. Montrer que $\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\right)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers $E[X_1]$.

Exercice 2 : (8 points)

Soient a et b deux nombres entiers tels que $0 < a < b$ et $\lambda\in IR_+^*$.

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi de probabilité est définie par :

$$P(X=i;Y=j)=e^{-b\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}C_j^i a^i(b-a)^{j-i};\ i,j\in IN;\ i\leq j$$

1°) Déterminer la loi marginale de Y. Donner $E(Y)$, $Var(Y)$.

2°) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $Y=j$.

3°) Déterminer la loi marginale de X.

4°) Calculer $Cov(X, Y)$.

Exercice 3 : (6 points)

Soient θ un réel strictement positif et X la variable aléatoire de densité f définie par :

$$\forall x\geq 1,\quad f(x)=\frac{1}{\theta}x^{-\frac{1+\theta}{\theta}},$$ et 0 sinon.

1°) Vérifier que f est bien une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition associée.

2°) Calculer $P(0 < X\leq 2)$.

3°) Pour quelles valeurs de θ, X admet-elle une espérance mathématique ? La calculer quand elle existe.

Bonne chance !