Chapitre 2: **Modèles linéaires (de Box-Jenkins)**

Prof. Mohamed El Merouani
Département de Statistique et Informatique
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan
Université Abdelmalek Essaâdi
e-mail: m_merouani@yahoo.fr

Modèle MA(q):

- Un modèle MA(q) est donné par

$$Y_t=\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\theta_2\varepsilon_{t-2}-\ldots-\theta_q\varepsilon_{t-q}$$

- ou en utilisant l'opérateur des retards:

$$Y_t= (1- \theta_1 L- \theta_2 L^2-\ldots- \theta_q L^q)\, \varepsilon_t =\theta(L)\varepsilon_t$$

- Si on multiplie les deux membres par de ce modèle par $Y_{t-\tau}$, et si on calcul des espérances mathématiques, …

on obtient les résultats suivants:

$$\gamma_0 = \left(1 + \theta_1^2 + \Lambda + \theta_q^2\right)\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_\tau = \begin{cases} \left(-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \Lambda + \theta_{q-\tau}\theta_q\right)\sigma_\varepsilon^2 & \tau = 1, 2, \mathrm{K}, q \\ 0 & \tau > q \end{cases}$$

Par conséquent, dans les auto-covariances existe une brusque coupure en q, puisqu'après ce retard leurs valeurs sont égales à 0.

- Le même phénomène se présente avec les coefficients d'auto-corrélations qui viennent données par:

$$R_\tau = \begin{cases} \dfrac{-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \Lambda + \theta_{q-\tau}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \Lambda + \theta_q^2} & \tau = 1, 2, \mathrm{K}, q \\ 0 & \tau > q \end{cases}$$

- Lorsqu'on a analysé les propriétés d'un MA(1), on a remarqué que $|R_1| \leq 1/2$.
- En général, les coefficients des auto-corrélations R_τ d'un MA(q) sont bornés.

On donne les valeurs maximales des coefficients des auto-corrélations d'un MA de différents ordres.

Ordre du retatrd (τ)	**Ordre du processus des moyennes mobiles (q)**												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0,50	0,71	0,81	0,87	0,90	0,92	0,94	0,95	0,96	0,97	0,97	0,97	0,98
2		0,50	0,50	0,71	0,71	0,81	0,81	0,87	0,87	0,90	0,90	0,92	0,92
3			0,50	0,50	0,50	0,71	0,71	0,71	0,81	0,81	0,81	0,87	0,87
4				0,50	0,50	0,50	0,50	0,71	0,71	0,71	0,71	0,81	0,81
5					0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,71	0,71	0,71	0,71
6						0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,71	0,71
7							0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50
8								0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50
9									0,50	0,50	0,50	0,50	0,50
10										0,50	0,50	0,50	0,50
11											0,50	0,50	0,50
12												0,50	0,50
13													0,50

- Pour qu'un MA(q) soit inversible, il faut que les racines de l'équation polynomiale:

$$1- \theta_1 L- \theta_2 L^2 - \ldots - \theta_q L^q = 0$$

tombent en dehors du cercle unité.

Modèles mixtes auto-régressifs-moyennes mobiles (ARMA):

- Un modèle ARMA(p,q) est définie par:

$$Y_t - \Phi_1 Y_{t-1} - \Phi_2 Y_{t-2} - \ldots - \Phi_p Y_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

- En utilisant les opérateurs polynomials de retards, le modèle vient dans sa forme compacte:

$$\Phi(L)Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

- Pour que le modèle soit stationnaire, il faut que les racines de l'équation polynomiale

$$\Phi(L)=1- \theta_1 L- \theta_2 L^2 - \ldots - \theta_q L^q=0$$

tombent en dehors du cercle unité.

- Si les conditions de stationnarité sont vérifiées, le modèle ARMA(p,q) peut s'exprimer comme un MA(∞) et se représente de la forme suivante:

$$Y_t = \frac{\theta(L)}{\Phi(L)}\varepsilon_t = \psi(L)\varepsilon_t$$

- Par conséquent, les coefficients de l'opérateur polynolial $\psi(L)$, qui a une infinité de termes, doivent satisfaire l'identité suivante:

$$\Phi(L)\psi(L) \equiv \theta(L)$$

ou, par une notation plus détaillée,

$$\left(1-\Phi_1 L-\ldots-\Phi_p L^p\right)\left(1+\psi_1 L+\psi_2 L^2+\ldots\right)\equiv\left(1-\theta_1 L-\ldots-\theta_q L^q\right)$$

A partir de cette identité, on peut déduire un ensemble d'équations qui nous donnent les ψ_i, en fonction des coefficients Φ_h et θ_i.

Ainsi, **dans un modèle ARMA(1,1)**, l'identité antérieure sera:

$$\left(1-\Phi_1 L\right)\left(1+\psi_1 L+\psi_2 L^2+\ldots\right)\equiv\left(1-\theta_1 L\right)$$

Développant le produit du premier membre et regroupant selon le degré de l'opérateur retard, on obtient:

$$\left(1+(\psi_1-\Phi_1)L+(\psi_2-\Phi_1\psi_1)L^2+(\psi_3-\Phi_1\psi_2)L^3+\ldots\right)\equiv\left(1-\theta_1 L\right)$$

- En égalisant, terme à terme, les coefficients des différentes puissances de L des deux membres, on obtient:

$$\psi_1-\Phi_1=-\theta_1 \qquad \text{d'où} \qquad \psi_1=\Phi_1-\theta_1$$

$$\psi_2-\Phi_1\psi_1=0 \qquad \text{d'où} \qquad \psi_2=\Phi_1\psi_1$$

- Pour τ>1, les coefficients ψ_τ peuvent s'obtenir de forme récursive à partir de l'équation aux différences

$$\psi_\tau=\Phi_1\psi_{\tau-1} \qquad \text{pour } \tau>1$$

- De forme analogue, dans un modèle ARMA(p,q), les coefficients $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_i$ peuvent s'obtenir à partir de l'identité

$$\Phi(L)\psi(L) \equiv \theta(L)$$

- Les valeurs de ψ_τ pour τ>q peuvent se déduire de l'équation aux différences suivantes:

$$\psi_\tau = \Phi_1\psi_{\tau-1} + \ldots + \Phi_p\psi_{\tau-p} \qquad \tau > q$$

- Pour qu'un modèle ARMA(p,q) soit inversible, il faut que les racines de l'équation polynomiale $\Phi(L)=1- \theta_1 L- \theta_2 L^2 - \ldots - \theta_q L^q=0$ tombent en dehors du cercle unité.

- Si les conditions d'inversibilité sont verifiées, le modèle ARMA(p,q) peut s'exprimer en fonction d'un AR(∞):

$$\varepsilon_t = \frac{\Phi(L)}{\theta(L)} Y_t = \pi(L) Y_t$$

où $\pi(L) = 1 - \pi_1 L - \pi_2 L^2 - \ldots$

- Les coefficients de l'opérateur polynomial $\pi(L)$ doivent satisfaire l'égalité suivante:

$$\pi(L)\theta(L) \equiv \Phi(L)$$

- Par un raisonnement identique à celui fait pour passer à un MA(∞), on obtient que, pour τ>p, les coefficients π_τ vérifient l'équation aux différences suivante

$$\pi_\tau = \theta_1 \pi_{\tau-1} + \ldots + \theta_q \pi_{\tau-q} \qquad \tau>p$$

- Dans le modèle ARMA(p,q), la moyenne est nulle. Si on ajoute au second membre un terme constant δ, la moyenne du processus se déduit de l'expression suivante:

$$E\left[\Phi(L)Y_t\right] = \delta + E\left[\theta(L)\varepsilon_t\right]$$

- Donc $\Phi(L)E\left(Y_t\right) = \delta$

- Si le processus est stationnaire, alors $E(Y_t)=\mu$, pour tout t, et alors

$$\mu = \frac{\delta}{1 - \Phi_1 L - \ldots - \Phi_p L^p} = \frac{\delta}{1 - \Phi_1 - \ldots - \Phi_p}$$

puisque lorsqu'on applique l'opérateur L à une constante –dans ce cas δ- on obtient la valeur de la constante elle-même.

- Dans la suite, nous examinons les propriétés d'un modèle ARMA(1,1), pour les généraliser, après, à un processus ARMA(p,q).

Modèle ARMA(1,1):

- Un modèle ARMA(1,1) est donné par l'expression

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_t \varepsilon_{t-1}$$

- En multipliant les deux membre du modèle par $Y_{t-\tau}$ et en prenant les espérances de tous les termes, on obtient:

$$\gamma_\tau = E[Y_t Y_{t-\tau}] = \Phi_1 \gamma_{\tau-1} + E[\varepsilon_t Y_{t-\tau}] - \theta_1 E[\varepsilon_{t-1} Y_{t-\tau}]$$

- En tenant compte que $E[\varepsilon_t Y_t] = \sigma_\varepsilon^2$

$$E[\varepsilon_{t-1} Y_t] = E[\varepsilon_{t-1}(\Phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})] = (\Phi_1 - \theta_1)\sigma_\varepsilon^2$$

- Pour τ=0, on obtient l'expression suivante

$$\gamma_0 = \Phi_1 \gamma_1 + \sigma_\varepsilon^2 - \theta_1(\Phi_1 - \theta_1)\sigma_\varepsilon^2$$

- Pour τ=1, on trouve facilement,

$$\gamma_1 = \Phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_\varepsilon^2$$

- Pour τ>1, il résulte que

$$\gamma_\tau = \Phi_1 \gamma_{\tau-1} \quad ; \qquad \tau > 1$$

- Si on substitue la valeur de γ_1 trouvée pour τ=1, dans l'expression trouvée pour τ=0, on obtient

$$\gamma_0 = \Phi_1[\Phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_\varepsilon^2] + \sigma_\varepsilon^2 - \theta_1(\Phi_1 - \theta_1)\sigma_\varepsilon^2$$

- Après, quelques opérations, on trouve

$$\gamma_0 = \frac{1-2\theta_1\Phi_1+\theta_1^2}{1-\Phi_1^2}\sigma_\varepsilon^2$$

- Et si on substitue cette valeur obtenue dans l'expression pour τ=1, et après quelques opérations, on obtient

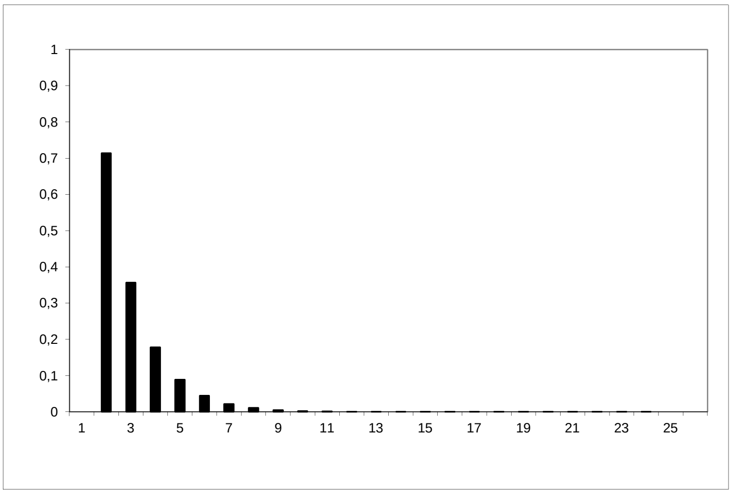
$$\gamma_1 = \frac{(1-\Phi_1\theta_1)(\Phi_1-\theta_1)}{1-\Phi_1^2}\sigma_\varepsilon^2$$

- En divisant cette dernière expression de γ_1 et l'expression de γ_τ (τ>1) obtenue avant, par γ_0, on obtient la suite suivante des coefficients d'auto-corrélations

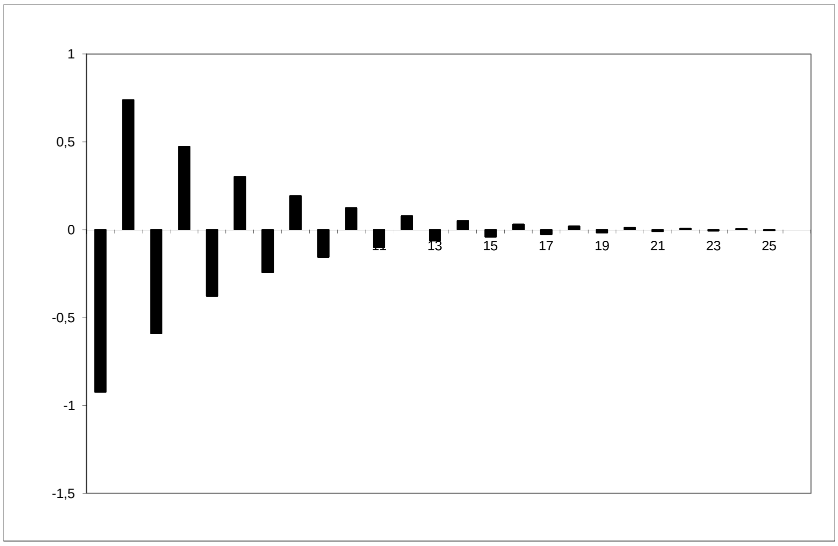
$$R_1 = \frac{(1-\Phi_1\theta_1)(\Phi_1-\theta_1)}{1-2\theta_1\Phi_1+\theta_1^2}$$

$$R_\tau = \Phi_1 R_{\tau-1} \quad ; \qquad \tau > 1$$

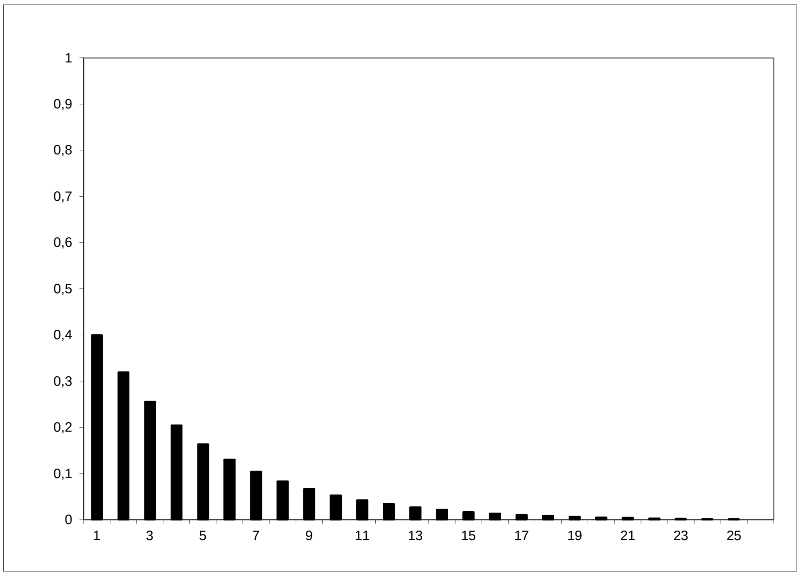
Dans les figures suivantes, on représente la fonction d'auto-corrélation correspondante à quatre modèles ARMA(1,1).



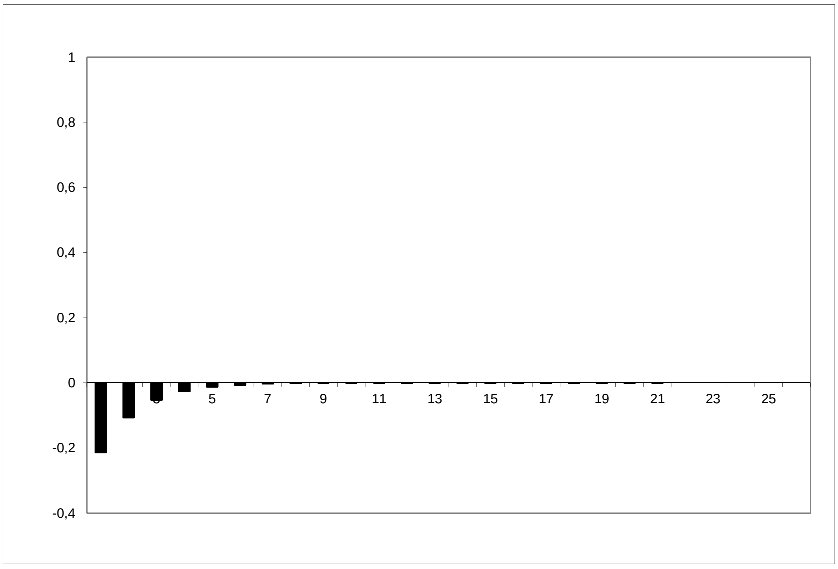
(a) Y_t-0,5Y_{t-1}=ε_t+0,5ε_{t-1}



(b) Y_t+0,8Y_{t-1}=ε_t-0,8ε_{t-1}



(c) Y_t-0,8Y_{t-1}=ε_t-0,5ε_{t-1}

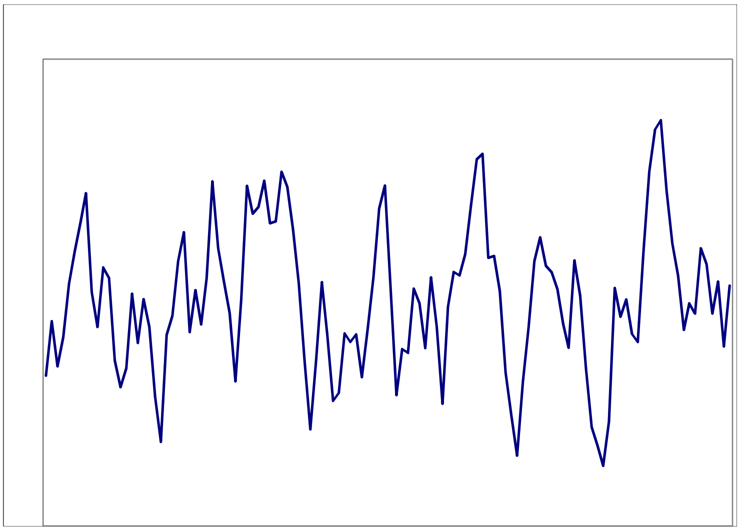


(d) Y_t-0,5Y_{t-1}=ε_t-0,8ε_{t-1}

Remarques:

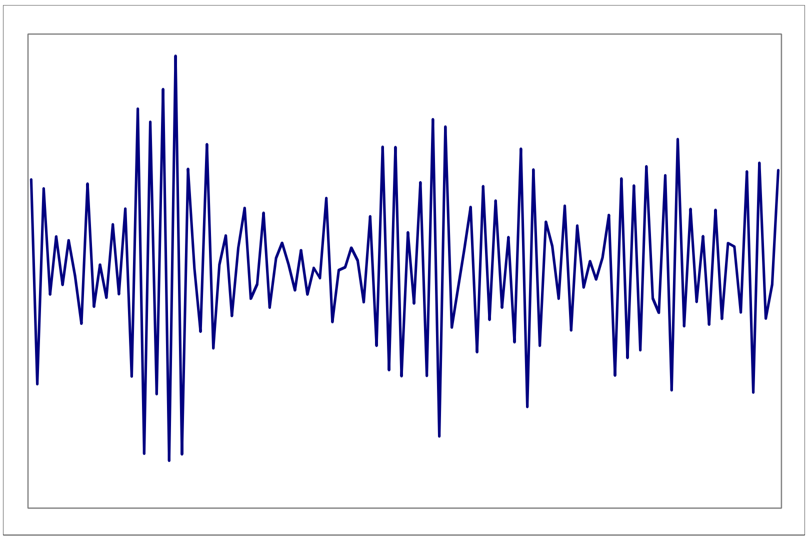
- Les coefficients d'auto-corrélations décroisent toujours en valeur absolue en tenant comme condition initiale R_1.
- Rappelons que dans les modèles AR(1), il y avait aussi une décroissance exponentielle mais la condition initiale était R_0.
- Dans quelques modèles, comme les cas (a) et (b), la partie des moyennes mobiles atténue considérablement la condition initiale à partir de laquelle commence la décroissance exponentielle.

- Dans les figures suivantes, on représente une réalisation correspondante à chacun des quatre modèles.



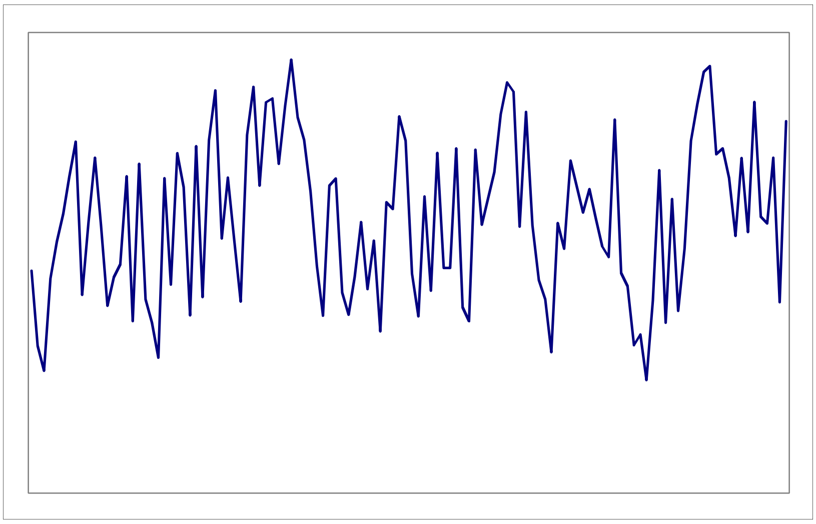
(a) Y_t-0,5Y_{t-1}=ε_t+0,5ε_{t-1}

Nombre d'observations: 120



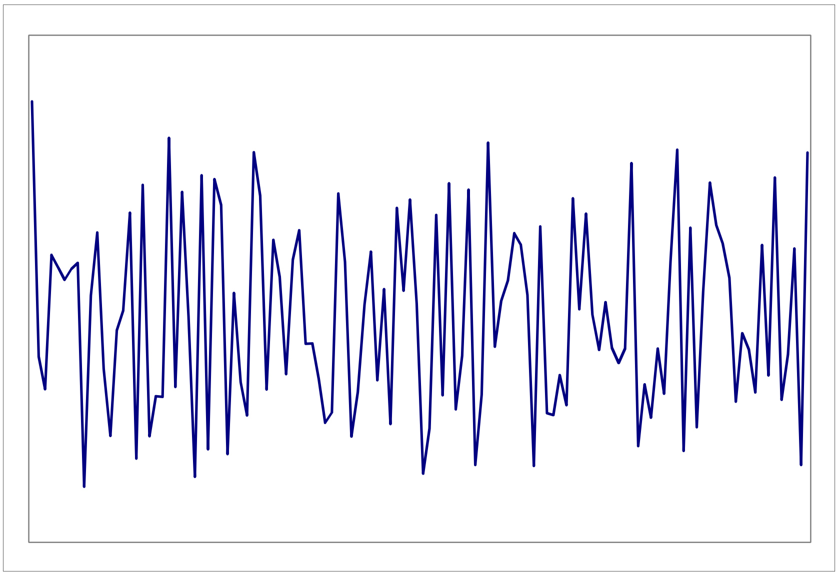
(b) Y_t+0,8Y_{t-1}=ε_t-0,8ε_{t-1}

Nombre d'observations: 120



(c) Y_t-0,8Y_{t-1}=ε_t-0,5ε_{t-1}

Nombre d'observations: 120



(d) Y_t-0,5Y_{t-1}=ε_t-0,8ε_{t-1}

Nombre d'observations: 120

Modèle ARMA(p,q):

- Un modèle ARMA(p,q) est donné par l'expression:

$$Y_t - \Phi_1 Y_{t-1} - \Phi_2 Y_{t-2} - \ldots - \Phi_p Y_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

- Et si dans cette expression, on multiplie les deux membre du modèle par $Y_{t-\tau}$ et en prenant les espérances de tous les termes, on obtient:

$$\gamma_\tau - \Phi_1 \gamma_{\tau-1} - \ldots - \Phi_p \gamma_{\tau-p} = E[\varepsilon_t Y_{t-\tau}] - \theta_1 E[\varepsilon_{t-1} Y_{t-\tau}] - \ldots - \theta_q E[\varepsilon_{t-q} Y_{t-\tau}]$$

- Pour le calcul des espérances du second membre, il faut tenir compte que

$$E[\varepsilon_t Y_{t'}] = 0 \qquad pour \quad t' < t$$

- Par conséquent, on vérifie que

$$\gamma_\tau - \Phi_1 \gamma_{\tau-1} - \ldots - \Phi_p \gamma_{\tau-p} = 0 \qquad pour \ \ \tau > q$$

Cette équation aux différences permet d'obtenir les auto-covariances à partir de $\tau>q$.

- D'une façon analogue, on divise par γ_0, on obtient:

$$R_\tau - \Phi_1 R_{\tau-1} - \ldots - \Phi_p R_{\tau-p} = 0 \qquad pour \ \ \tau > q$$

- Cette dernière équation aux différences nous permet d'obtenir les coefficients d'auto-corrélations pour $\tau > q$.

  Lors de la détermination des q premières valeurs de R_τ intervient la partie des moyennes mobiles du modèle.
- Dans les modèles ARMA(p,q), il convient de factoriser la partie autorégressive et la partie des moyennes mobiles pour voir si il existe des racines communes.

- Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les racines de l'équation aux différences

$$\lambda^p - \Phi_1 \lambda^{p-1} - \ldots - \Phi_p = 0$$

et soient $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_q$ les racines de l'équation aux différences

$$\delta^q - \theta_1 \delta^{q-1} - \ldots - \theta_q = 0$$

- Une forme alternative d'exprimer le modèle ARMA(p,q) sera, par conséquent, la suivante:

$$(1-\lambda_1 L)\ldots(1-\lambda_p L)Y_t = (1-\delta_1 L)\ldots(1-\delta_q L)\varepsilon_t$$

- S'il existe une certaine racine identique pour les deux membres (par exemple, si $\lambda_1=\delta_q$) alors le modèle ARMA(p,q) sera excessivement paramétré d'une manière inutile, puisqu'un modèle avec les mêmes propriétés sera un ARMA(p-1,q-1).
- Dans ce cas, on vérifie que

$$(1-\lambda_2 L)\ldots(1-\lambda_p L)Y_t=(1-\delta_1 L)\ldots(1-\delta_{q-1} L)\varepsilon_t$$

Processus non-stationnaires

- Pour les processus que l'on a vu avant dans ce cours, on a supposé les conditions de stationnarité ou d'inversibilité.
- Mais, comme on a déjà mentionné, la majorité des séries temporelles du domaine de l'économie doivent être considérées comme générées par des processus non-stationnaires.
- Alors, on doit aussi inclure dans notre étude, des séries temporelles de l'économie, basée sur les processus stochastiques, au moins un certain type de processus non-stationnaires.

- En principe, on peut imaginer une infinité de manières par lesquelles on peut introduire la non-stationnarité en un processus. Néanmoins, il nous intéresse de considérer seulement quelques types de processus non stationnaires qui soient adéquats pour décrire le comportement des séries économiques, et, au même temps, ils soient facilement transformables en processus stationnaires pour pouvoir profiter des avantages qui offrent ces derniers.
- Dans cette perspective, parmi les modèles non stationnaires, on considère, en un premier lieu, comme introduction, le modèle: $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$

- Ce modèle $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$ est un AR(1) avec le coefficient $\Phi_1 = 1$.
- Ce modèle s'appelle aussi « marche aléatoire » ou « random walk ».
- Si le processus débute en un passé lointain, par des substitutions successives, on peut l'exprimer ainsi:

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_{t-j}$$

- La variance de ce processus est infinie comme nous avons déjà vu, et par conséquent, il est non stationnaire.

- Si on suppose, de nouveau, que le processus commence en $-N+1$, la variance pour la période t sera donnée par l'expression suivante:
$$\gamma_{0,t} = (t+N)\,\sigma_\varepsilon^2$$
- Ce processus est non stationnaire puisqu'il prend des valeurs distinctes pour chaque t.
- D'une manière analogue, on obtient l'auto-covariance d'ordre τ pour l'instant t
$$\gamma_{\tau,t} = (t+N-\tau)\sigma_\varepsilon^2$$

- Le coefficient d'auto-corrélation d'ordre τ pour l'instant t sera
$$R_{\tau,t} = \frac{\gamma_{\tau,t}}{\sqrt{\gamma_{0,t}}\sqrt{\gamma_{0,t-\tau}}} = \frac{t+N-\tau}{\sqrt{t+N}\sqrt{t+N-\tau}} = \sqrt{\frac{t+N-\tau}{t+N}}$$
- La valeur que prend R_t dépend clairement de l'instant t de référence. Mais, pour t suffisamment grand, sa valeur se situe très proche de 1. Lorsque t tend vers l'infini (ou bien lorsque l'instant initial remonte vers -∞) alors le coefficient d'auto-corrélation n'est défini.

- Mais, le processus « Marche aléatoire »

$$Y_t=Y_{t\text{-}1}+\varepsilon_t$$

peut être transformé facilement en un processus stationnaire.

- En effet, le processus

$$w_t=Y_t\text{-}Y_{t\text{-}1}=\Delta Y_t$$

Donc $w_t=\Delta Y_t=\varepsilon_t$

c'est-à-dire, le processus transformé –obtenu en prenant les différences premières dans le processus original- est exactement le « bruit blanc »

- En prenant des différences de premier ordre, on passe de Y_t au processus w_t.
- Considérons, maintenant, le cas inverse, c'est-à-dire comment obtenir Y_t à partir du processus w_t.
- Par substitutions successives, on a

$$Y_t=w_t+Y_{t\text{-}1}=w_t+w_{t\text{-}1}+Y_{t\text{-}2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=w_t+w_{t\text{-}1}+w_{t\text{-}2}+w_{t\text{-}3}+w_{t\text{-}4}+\ldots$$

- Par conséquent, le processus Y_t s'obtient en **sommant**, ou ce qui est le même, en **intégrant** le processus w_t.

- Pour cette raison, on dit que la « marche aléatoire » appartient à la classe des modèles intégrés.
- Cette classe est constituée par tous les modèles qui peuvent être transformés en des modèles stationnaires en prenant des différences d'un ordre déterminé, ou autrement dit, les modèles intégrés sont ceux qui peuvent être obtenus par une somme ou une intégration d'un processus stationnaire.
- On appelle ces modèles aussi des modèles non stationnaires homogènes et ils étaient étudiés par Tintner (1940), Tintner et Rao (1963), Yaglom (1955) et finalement par Box et Jenkins (1976) qui ont largement contribué à leur divulgation.

- Á un processus intégré Y_t, on l'appelle un processus ARIMA(p,d,q) si en prenant des différences d'ordre d on obtient un processus stationnaire w_t du type ARMA(p,q).
- La lettre « I » au centre du terme ARIMA est une abréviation d'intégré.
- Ainsi, on a

$$w_t=\Delta^d Y_t=(1-L)^d Y_t$$
$$(1-\Phi_1 L-\ldots-\Phi_p L^p)w_t=(1-\theta_1 L-\ldots-\theta_q L^q)\varepsilon_t$$

- En une forme plus réduite, un processus ARIMA(p,d,q) est défini par:

$$\Phi(L)(1-L)^d Y_t=\theta(L)\varepsilon_t$$

- Les modèles ARIMA constituent une classe particulière des processus non stationnaires. Quand même, dans plusieurs cas, ils sont suffisantes pour représenter le comportement des séries économiques.
- Lorsqu'une série économique est observée le long d'une période dilatée du temps, il arrive fréquemment que la variance vient affectée par une tendance, et cette tendance ne disparaissent pas par la prise des différences.
- Lorsque cette circonstance se présente, la transformation adéquate consiste à introduire des logarithmes.

Exercices

Ex. 1:

Soit le modèle AR(1) suivant:

Y_t=0,8$Y_{t-1}+\varepsilon_t$

σ_ε^2=2

On demande:

1) Est-il stationnaire?
2) Est-il inversible?
3) Calculer la suite $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_5$.
4) Calculer la suite $R_1, R_2,\ldots, R_5$.
5) Calculer les coefficients $\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_5$ du modèle MA(∞) en lequel, c'est si possible, peut se transformer le modèle AR(1) donné.

Ex. 2:

Soit le modèle MA(1) suivant:

$Y_t = \varepsilon_t - 0{,}9\varepsilon_{t-1}$

$\sigma_\varepsilon^2 = 4$

On demande:

1) Est-il stationnaire?
2) Est-il inversible?
3) Calculer la suite $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_5$.
4) Calculer la suite $R_1, R_2, \ldots, R_5$.
5) Calculer les coefficients $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_5$ correspondants au modèle inverti AR(∞).

Ex. 3:

Soit le modèle AR(2) suivant:

$Y_t = 0{,}6Y_{t-1} + 0{,}3Y_{t-2} + \varepsilon_t$

$\sigma_\varepsilon^2 = 3$

On demande:

1) Est-il stationnaire?
2) Est-il inversible?
3) Calculer la suite $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_5$.
4) Calculer la suite $R_1, R_2, \ldots, R_5$.

Ex. 4:

Soit le modèle MA(2) suivant:

$Y_t = \varepsilon_t - 0,4\varepsilon_{t-1} + 1,2\varepsilon_{t-2}$

$\sigma_\varepsilon^2 = 2$

On demande:

1) Est-il stationnaire?
2) Est-il inversible?
3) Calculer la suite $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_5$.
4) Calculer la suite $R_1, R_2, \ldots, R_5$.

Ex. 5:

Soit le modèle ARMA(1,1) suivant:

$Y_t = 0,9Y_{t-1} + \varepsilon_t - 0,8\,\varepsilon_{t-1}$

$\sigma_\varepsilon^2 = 5$

On demande:

1) Est-il stationnaire?
2) Est-il inversible?
3) Calculer la suite $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_5$.
4) Calculer la suite $R_1, R_2, \ldots, R_5$.

Ex. 6:

Soit le modèle ARIMA (0,1,1) suivant:

$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t - 0{,}9\ \varepsilon_{t-1}$

On demande de:

1) Exprimer l'équation antérieure comme un modèle AR(∞).
2) On notant π_i les coefficients du modèle AR(∞), démontrer que $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = 1$
   Cette démonstration est-elle valable pour tous les modèles ARIMA(0,1,1)?

Références:

- Ezequiel URIEL JIMÉNEZ:«Análisis de series temporales. Modelos ARIMA», Collection ábaco, editorial PARANINFO, Madrid, 1995.
- Régis BOURBONNAIS, Michel TERRAZA: «Analyse des séries temporelles: Applications à l'économie et à la gestion», DUNOD, 2004.
- Sandrine LARDIC, Valérie MIGNON: «Économétrie des Séries Temporelles Macroéconomiques et Financières», Economica, 2002.