

**Contrôle Écrit de Modélisation
Économétrie en Finance
Durée : 2 heures**

Répondez aux dix questions suivantes :

- 1) Quelles sont les méthodes de lissage de séries temporelles que vous connaissez ?
- 2) Citer les deux façons de caractériser un processus stochastique ? Laquelle vous préférez et pourquoi ?
- 3) C'est quoi un corrélogramme et pourquoi et comment est-il utilisé pour une certaine série temporelle ?
- 4) Expliquer comment et quand est-ce qu'une série temporelle est ergodique ?
- 5) Donner les propriétés et les caractéristiques d'un processus « bruit blanc ».
- 6) Quelles sont les conditions de stationnarité et d'inversibilité d'un modèle ARMA(p,q) ?
- 7) Les séries temporelles du domaine de l'économie et de la finance sont non-stationnaires. Comment peut-on exprimer cette non-stationnarité dans un processus stochastique ? Donner un exemple et expliquer pourquoi, il n'est pas stationnaire ?
- 8) Peut-on transformer un modèle non-stationnaire en un modèle stationnaire ? Si oui, comment peut-on le faire ?
- 9) Quelle est la raison, pour laquelle, on a proposé des modèles ARCH et GARCH ?
- 10) Comment peut-on savoir si une modélisation adéquate de données est ARCH ou bien GARCH ?

Bonne chance !

Corrections

1) Parmi les méthodes de lissage de séries temporelles, il y a :

- Le lissage par la méthode des moyennes mobiles
- La méthode de lissage exponentiel
- ...

2) Un processus stochastique est parfaitement caractérisé lorsque l'on peut déterminer les fonctions de distribution conjointe pour chaque ensemble fini de variables du processus, c'est-à-dire pour chaque nombre fini " n " de variables aléatoires.

La détermination des caractéristiques du processus à partir des fonctions de distribution est, en général, une méthode compliquée. Pour cela, on a l'habitude d'utiliser de préférence la méthode des moments.

Dans une distribution de probabilité, on peut calculer les moments de différents ordres, même si les moments de premier et de second ordre sont les plus utilisés.

La caractérisation d'un processus stochastique par les moments de premier et de second ordre est, en principe, plus incomplète que lorsqu'elle est faite par les fonctions de distribution.

3) Pour une série temporelle, la représentation graphique des autocorrélations R_k pour $k=0,1,2,3,\dots$ s'appelle un Corrélogramme.

L'examen du Corrélogramme des données observées permettra de repérer l'existence d'autocorrélations éventuelles ainsi que l'ordre d'autocorrélation le plus significatif.

Si toutes les auto-corrélations sont significativement différentes de zéro et diminuent très lentement, alors ceci indique que la série temporelle est non-stationnaire.

Il est ensuite nécessaire de vérifier cette intuition en appliquant des tests statistiques de stationnarité et/ou de non stationnarité.

4) En plus d'être stationnaire, il est nécessaire que le processus stochastique ait la propriété d'ergodicité, pour que l'inférence peut se réaliser d'une forme adéquate.

Le concept d'ergodicité sera examiné d'une forme intuitive. Lorsqu'il y a une forte corrélation entre les valeurs d'une série temporelle éloignées dans le temps, c'est-à-dire R_k garde des valeurs très élevées pour un k assez grand, il arrive que lorsque on augmente la taille de l'échantillon, il y a peu d'information nouvelle qui s'ajoute. La conséquence de ce fait est que l'augmentation de la taille de l'échantillon n'aura pas d'utilité, puisqu'il

faudra calculer un nombre élevé d'autocovariances pour bien caractériser le processus. Lorsque la propriété d'ergodicité est vérifiée, on peut caractériser le processus par ses moments de premier et de second ordre.

Une condition nécessaire, mais pas suffisante de l'ergodicité est: $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = 0$

Lorsqu'un processus est stationnaire –et aussi érgodique- tout le problème de l'inférence se simplifie d'une façon remarquable.

5) Donner les propriétés et les caractéristiques d'un processus « bruit blanc ».

Le processus purement aléatoire est le plus simple de tous. Il peut s'exprimer de la forme suivante:

$$Y_t = \varepsilon_t$$

Où ε_t satisfait les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} E[\varepsilon_t] &= 0 && \text{pour tout } t \\ E[\varepsilon_t]^2 &= \sigma^2 && \text{pour tout } t \\ E[\varepsilon_t \varepsilon_{t'}] &= 0 && \text{pour } t \neq t'. \end{aligned}$$

Donc ε_t se caractérise par sa moyenne nulle, par sa variance constante dans le temps et par le fait qu'il n'existe pas de relation entre deux valeurs de la variable prises en deux instants distincts du temps.

- Les caractéristiques de ε_t sont identiques à celles qui a la perturbation aléatoire dans le modèle de régression linéaire multiple sous les hypothèses élémentaires.
- Dans la théorie des séries temporelles, on a l'habitude de nommer un processus purement aléatoire par "bruit blanc" (ou "white noise").
- Par la suite, on désignera par ε_t une variable aléatoire qui a les propriétés vues précédemment.
- Comme il n'existe pas de relation entre des valeurs prises dans différents instants de temps, le "bruit blanc" est loin du concept intuitive de processus stochastique.
- Autrement dit, pour utiliser des variables aléatoires du type de ε_t , on n'a pas besoin de la théorie des processus stochastique.
- Certes! Mais le "bruit blanc" est indispensable pour l'élaboration des modèles de processus stochastiques très complexes comme les modèles de la classe AR (Auto-regressive) et les modèles de la classe MA (Moyennes mobiles; Moving-average) que nous allons voir.

- 6) Pour qu'un modèle ARMA(p,q) soit stationnaire et inversible, il faut que les racines de l'équation polynomiale

$$\Phi(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q = 0$$

tombent en dehors du cercle unité.

- 7) Les séries temporelles du domaine de l'économie et de la finance sont non-stationnaires. Comment peut-on exprimer cette non-stationnarité dans un processus stochastique ? Donner un exemple et expliquer pourquoi, il n'est pas stationnaire ?

la majorité des séries temporelles du domaine de l'économie doivent être considérées comme générées par des processus non-stationnaires.

- En principe, on peut imaginer une infinité de manières par lesquelles on peut introduire la non-stationnarité en un processus. Néanmoins, il nous intéresse de considérer seulement quelques types de processus non stationnaires qui soient adéquats pour décrire le comportement des séries économiques, et, au même temps, ils soient facilement transformables en processus stationnaires pour pouvoir profiter des avantages qui offrent ces derniers.
- Dans cette perspective, parmi les modèles non stationnaires, on considère, en un premier lieu, comme introduction, le modèle:

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Ce modèle $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$ est un AR(1) avec le coefficient $\Phi_1 = 1$.
- Ce modèle s'appelle aussi « marche aléatoire » ou « random walk ».
- Mais, le processus « Marche aléatoire » $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$ peut être transformé facilement en un processus stationnaire.
- En effet, le processus $w_t = Y_t - Y_{t-1} = \Delta Y_t$ Donc $w_t = \Delta Y_t = \varepsilon_t$ c'est-à-dire, le processus transformé –obtenu en prenant les différences premières dans le processus original- est exactement le « bruit blanc »
- En prenant des différences de premier ordre, on passe de Y_t au processus w_t .

- Considérons, maintenant, le cas inverse, c'est-à-dire comment obtenir Y_t à partir du processus w_t .
 - Par substitutions successives, on a

$$Y_t = w_t + Y_{t-1} = w_t + w_{t-1} + Y_{t-2}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$= w_t + w_{t-1} + w_{t-2} + w_{t-3} + w_{t-4} + \dots$$
 - Par conséquent, le processus Y_t s'obtient en **sommant**, ou ce qui est le même, en **intégrant** le processus w_t .
 - Pour cette raison, on dit que la « marche aléatoire » appartient à la classe des modèles intégrés.
 - Cette classe est constituée par tous les modèles qui peuvent être transformés en des modèles stationnaires en prenant des différences d'un ordre déterminé, ou autrement dit, les modèles intégrés sont ceux qui peuvent être obtenus par une somme ou une intégration d'un processus stationnaire.
 - On appelle ces modèles aussi des modèles non stationnaires homogènes et ils étaient étudiés par Tintner (1940), Tintner et Rao (1963), Yaglom (1955) et finalement par Box et Jenkins (1976) qui ont largement contribué à leur divulgation.
 - À un processus intégré Y_t , on l'appelle un processus ARIMA(p,d,q) si en prenant des différences d'ordre d on obtient un processus stationnaire w_t du type ARMA(p,q).
- 8) Peut-on transformer un modèle non-stationnaire en un modèle stationnaire ? Si oui, comment peut-on le faire ?
(voir en haut)
- 9) Quelle est la raison, pour laquelle, on a proposé des modèles ARCH et GARCH ?
 Les modèles classiques de prévision fondés sur les modèles ARMA supposent des séries temporelles à variance constante (hypothèse d'homoscédasticité).
 Cette modélisation néglige donc, éventuellement, l'information contenue dans le facteur résiduel de la série.
 Les séries financières sont caractérisées par des périodes de forte spéculation (variabilité élevée) suivie de périodes d'accalmie (variabilité faible).

Les modèles de type **ARCH** (AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity) permettent de modéliser les séries financières qui ont une volatilité (ou variance ou variabilité) instantanée qui dépend du passé.

Il est ainsi possible d'élaborer une prévision dynamique de la série en termes de moyenne et de variance.

Présentés initialement par ENGLE (1928), les modèles ARCH ont connu des développements et des applications très importants durant la dernière décennie.

10) Comment peut-on savoir si une modélisation adéquate de données est ARCH ou bien GARCH ?

Dans le cas d'une hétéroscédasticité conditionnelle supposée, on ne peut tester une spécification de type ARCH que contre une spécification de type GARCH.

Le test porte sur l'hypothèse nulle H_0 d'une erreur ARCH(p) contre l'hypothèse H_1 d'une erreur GARCH(p, q). On va donc tester l'hypothèse H_0 que les β_j sont nuls.

$$H_0: \beta_j = 0, j = 1, \dots, q;$$

contre l'hypothèse H_1 : il existe au moins un β_j non nul.

Le test le plus approprié est celui du multiplicateur de Lagrange: $nR^2 \xrightarrow{d} \chi^2(q)$ (q =degré de liberté) où R^2 est le coefficient de détermination obtenu dans la régression par les MCO dans l'équation

Si $nR^2 > \chi^2(q)$ lu dans la table à un seuil de confiance (en général 0,05) et q degrés de liberté alors on rejette l'hypothèse H_0 . Les erreurs obéissent à un processus GARCH(p, q).