Université Abdelmalek Essaâdi **Année Universitaire : 2015-2016**
Faculté Polydisciplinaire **Master Spécialisé GIE**
Tétouan **$2^{ème}$ Année (S9)**

Contrôle Écrit de Méthodes de Prévision

Durée : 2 heures

Questions de cours :

1. Pourquoi des séries temporelles sont non stationnaires?
2. Comment rendre une série temporelle stationnaire?
3. Quand est-ce qu'un processus stochastique est ergodique ?

Problème 1:

Soit le modèle **MA(2)** suivant:

$$Y_t = \varepsilon_t + 0{,}6\varepsilon_{t-1} - 0{,}3\varepsilon_{t-2}$$
$$\sigma_\varepsilon^2 = 2$$

1. Ce modèle est-il stationnaire?
2. Ce modèle est-il inversible?
3. Calculer $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_5$.
4. Calculer $R_1, R_2, \ldots, R_5$.

Problème 2:

Soit le modèle **ARMA(1,1)** suivant:

$$Y_t = 0{,}8Y_{t-1} + \varepsilon_t + 0{,}7\,\varepsilon_{t-1}$$
$$\text{avec} \quad \sigma_\varepsilon^2 = 3$$

1. Ce modèle est-il stationnaire?
2. Ce modèle est-il inversible?
3. Calculer la suite $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_5$.
4. Calculer la suite $R_1, R_2, \ldots, R_5$.
5. Calculer les coefficients $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_5$ du modèle **MA(∞)** correspondants.
6. Calculer les coefficients $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_5$ du modèle **AR(∞)** correspondants.

Corrigés du contrôle de Méthodes de Prévision

Questions de cours :

1. La première série non stationnaire à laquelle on pense est celle qui est croissante dans le temps. Une série saisonnière est également non stationnaire puisque la valeur espérée dépend du temps dans la période de la saison. Une série dont la dispersion varie dans le temps n'est pas stationnaire.

2. En fait, en prenant une série brutalement, on a fort peu de chances pour qu'elle soit stationnaire. La transformation par le Logarithme permet d'éviter le problème de qu'une série ait une dispersion qui varie dans le temps. Comme on peut aussi utiliser les techniques de lissage de la série.

3. Lorsqu'il y a une forte corrélation entre les valeurs d'une série temporelle éloignées dans le temps, c'est-à-dire R_k garde des valeurs très élevées pour un k assez grand, il arrive que lorsqu'on augmente la taille de l'échantillon, il y a peu d'information nouvelle qui s'ajoute. La conséquence de ce fait est que l'augmentation de la taille de l'échantillon n'aura pas d'utilité, puisqu'il faudra calculer un nombre élevé d'autocovariances pour bien caractériser le processus. Alors que lorsque la propriété d'ergodicité est vérifiée, on peut caractériser le processus par ses moments de premier et de second ordre. Une condition nécessaire, mais pas suffisante de l'érgodicité est:

$$\lim_{k\to\infty} R_k = 0$$

Problème 1:

Le modèle à étudier est un MA(2) $Y_t=\varepsilon_t+0{,}6\varepsilon_{t-1}-0{,}3\varepsilon_{t-2}$

avec $\sigma_\varepsilon^2=2$

1) Par définition, tout processus MA d'ordre fini est stationnaire.

2) Pour vérifier si les conditions d'inversibilité sont satisfaites, on calcul les racines de l'équation caractéristique : $\lambda2+0{,}6\lambda-0{,}3=0$

   Le discriminant de cette équation est $\Delta=(0{,}6)^2+4\times0{,}3=1{,}56>0$

   Donc, cette équation admet deux racines réelles distinctes

   $$\lambda_1,\lambda_2=\frac{0{,}6\pm\sqrt{1{,}56}}{2}$$

   Donc $\lambda_1=0{,}925$

   $\lambda_2=-0{,}325$

   D'où $|\lambda_1|<1$ et $|\lambda_2|<1$

   Par conséquent le processus MA(2) considéré est inversible.

   Une autre alternative est d'utiliser le polynôme caractéristique $1+0{,}6L-0{,}3L^2=0$

Son discriminant est $\Delta=(0,6)^2+4\times0,3=1,56>0$

Donc il admet deux racines réelles distinctes qui sont

$$L_1=\frac{0,6-\sqrt{1,56}}{2\times(-0,3)}=1,083$$

$$L_1=\frac{0,6+\sqrt{1,56}}{2\times(-0,3)}=-3,083$$

D'où $|L_1|>1$ et $|L_2|>1$

Par conséquent le processus MA(2) considéré est inversible.

On peut voir facilement que

$$\lambda_1=\frac{1}{L_1}=\frac{1}{1,083}=0,932$$

$$\lambda_2=\frac{1}{L_2}=\frac{1}{-3,083}=-0,324$$

3) Pour calculer $\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_5$, on utilise les relations

$$\begin{cases}\gamma_0=\left(1+\theta_1^2+\theta_2^2\right)\sigma_\varepsilon^2\\ \gamma_1=\left(-\theta_1+\theta_1\theta_2\right)\sigma_\varepsilon^2\\ \gamma_2=\left(-\theta_1\right)\sigma_\varepsilon^2\\ \gamma_\tau=0;\ \tau=3,4,5,...\end{cases}$$

Ici, on a $\theta1=-0,6$ $\theta2=0,3$ et $\sigma\varepsilon2=2$