Exercices sur les séries temporelles pour Gestion et Finance

Exercice 1:

Soit le processus AR(1) :

$Y_t = \delta + 0,9 Y_{t-1} + \varepsilon_t$

où δ est une constante.

Montrer que les coefficients d'auto-corrélations ne dépendent pas des valeurs que l'on peut assigner à δ.

Solution 1:

En exprimant le modèle comme un processus MA, on aura :

$$Y_t = \frac{1}{1-0,9L}\left[\delta + \varepsilon_t\right] = \frac{1}{1-0,9}\delta + \sum_{j=0}^{\infty} 0,9^j \varepsilon_{t-j}$$

La moyenne et la variance de la série sont :

$$E[Y_t] = \frac{\delta}{1-0,9}$$

$$E\left[Y_t - \frac{\delta}{1\_0,9}\right]^2 = E\left[\sum_{j=0}^{\infty} 0,9^j \varepsilon_{t-j}\right]^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-0,9^2}$$

D'autre part, les auto-covariances d'ordre τ seront données par :

$$\gamma_\tau = E\left[Y_t - \frac{\delta}{1-0,9}\right]\left[Y_{t-\tau} - \frac{\delta}{1-0,9}\right] = E\left[\sum_{j=0}^{\infty} 0,9^j \varepsilon_{t-j}\right] E\left[\sum_{j=0}^{\infty} 0,9^j \varepsilon_{t-j-\tau}\right] =$$

$$= E\left[\varepsilon_t + 0,9\varepsilon_{t-1} + \cdots + 0,9^\tau \varepsilon_{t-\tau} + \cdots\right]\left[\varepsilon_{t-\tau} + 0,9\varepsilon_{t-\tau-1} + 0,9^2 \varepsilon_{t-\tau-2} + \cdots\right] =$$

$$= 0,9^\tau \frac{1}{1-0,9^2}\sigma_\varepsilon^2$$

Comme on peut voir, la variance et les auto-covariances ne dépendent pas de la constante δ. Par conséquent, les coefficients d'auto-corrélations de dépendront non plus des valeurs que l'on peut attribuer à δ.

Exercice 2:

Soit le modèle AR(2) suivant :

$Y_t = Y_{t-1} - 0,21\, Y_{t-2} + \varepsilon_t$

a) Ce modèle est-il stationnaire ? inversible ?
b) Calculer les coefficients ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 et ψ_5 du modèle MA(2) correspondant.

Solution 2:

a) Pour qu'un modèle AR(2) soit stationnaire, il faut que les racines de l'équation caractéristique soient inférieures à 1 en valeur absolue.
En utilisant l'équation caractéristique $\lambda^2-\lambda+0,21=0$
Les racines cherchées sont $$\lambda_1,\lambda_2=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{(-1)^2-4\times 0,21}}{2}=0,5\pm 0,2$$
Donc λ_1=0,7 et λ_2=0,3 sont des racines réelles et distinctes.
Comme $|\lambda_1|=|0,7|<1$ et $|\lambda_2|=|0,3|<1$ le processus est stationnaire.
Il est inversible parce que, par définition, tout AR d'ordre fini est inversible.

b) Pour déterminer les coefficients du modèle MA(∞) correspondant à ce AR(2), on peut utiliser le procédé des fractions rationnelles ou alternativement le système $\psi(L)\phi(L)=1$.
D'abord en utilisant les fractions rationnelles, on obtient :
$$Y_t=\left[\frac{1,75}{1-0,7L}-\frac{0,75}{1-0,3L}\right]\varepsilon_t=\left[1,75\sum_{j=0}^{\infty}(0,7L)^j-0,75\sum_{j=0}^{\infty}(0,3L)^j\right]\varepsilon_t=$$
$$Y_t=\varepsilon_t+\varepsilon_{t-1}+0,79\varepsilon_{t-2}+0,58\varepsilon_{t-3}+0,4\varepsilon_{t-4}+0,29\varepsilon_{t-5}+\cdots$$
Ou en utilisant le système $\psi(L)\phi(L)=1$, on obtient les relations suivantes :
$\Psi_1-\phi_1=0$
$\Psi_2-\Psi_1\,\phi_1-\phi_2=0$
Pour j>0, on obtient l'équation en différences suivante :
$\Psi_j=\phi_1\Psi_{j-1}-\phi_2\,\Psi_{j-2}$
Comme ici $\phi_1=1$ et $\phi_2=-0,21$, on obtient :
$\Psi_1=1$
$\Psi_2=1\times 1-0,21=0,79$
$\Psi_3=1\times 0,79-0,21\times 1=0,58$
$\Psi_4=1\times 0,58-0,21\times 0,79=0,41$
$\Psi_5=1\times 0,41-0,21\times 0,58=0,29$

Exercice 3:

Soit le modèle AR(2) suivant :

$Y_t=-0,8Y_{t-1}+0,1\,Y_{t-2}+\varepsilon_t$

a) Ce modèle est-il stationnaire ? inversible ?
b) Calculer les coefficients ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 et ψ_5 du modèle MA(2) correspondant.

Exercice 4:

On dispose de la séquence suivante des coefficients d'auto-corrélation :

$R_1=0,70$; $R_2=0,49$; $R_3=0,34$; $R_4=0,24$ et $R_5=0,17$.

De quel processus AR(p) peuvent provenir ces coefficients ? Considérez uniquement des valeurs faibles de p.

Solution 4:

On commence par essayer d'abord un AR(1).

Comme dans un modèle AR(1), on a $\phi_1=R_1$ on aura le modèle suivant : $Y_t=0,70Y_{t-1}+\varepsilon_t$.

Dans un modèle AR(1), les coefficients d'auto-corrélation se génèrent par l'équation en différences : $R_\tau=\phi_1 R_{\tau-1}$ sachant que $R_0=1$.

En appliquant la formule de récurrence précédente, on obtient : $R_1=0,7$; $R_2=0,49$; $R_3=0,343$; $R_4=0,2401$ et $R_5=0,16807$.

Exercice 5:

On dispose de la séquence suivante des coefficients d'auto-corrélation :

$R_1=0,80$; $R_2=0,82$; $R_3=0,74$; $R_4=0,71$ et $R_5=0,66$.

De quel processus AR(p) peuvent provenir ces coefficients ? Considérez uniquement des valeurs faibles de p.

Solution 5:

On commence par essayer un AR(1). Mais, dans un AR(1), on a : $R_\tau=\phi_1 R_{\tau-1}$ pour $\tau>0$. En prenant $\phi_1=R_1=0,8$ on aura $R2=0,8 \times 0,8=0,64\neq 0,82$.

Donc, ce n'est pas un AR(1).

Essayant un AR(2). Avec le système de Yule-Walker, on aura :

$$\begin{cases} 0,80 = \phi_1 + 0,80\phi_2 \\ 0,82 = 0,80\phi_1 + \phi_2 \end{cases}$$

que nous résolvons pour ϕ_1 et ϕ_2, on obtient $\phi_1=0,4$ et $\phi_2=0,5$.

Donc, en utilisant l'équation en différence : $R_\tau=0,4R_{\tau-1}+0,5R_{\tau-2}$

pour calculer R_3, R_4 et R_5, on obtient les résultats suivants :

$R_3=0,728$

$R_4=0,7012$

et $R_5=0,6448$

qui coïncident, à des petites erreurs près, avec les coefficients données. Par conséquent, on peut supposer qu'ils proviennent d'un modèle AR(2).

Exercice 6:

Dans un modèle AR(2), on sait que $\phi_1=0,7$ et $R_1=0,9$. Peut-on déduire la valeur de ϕ_2 ?

Solution 6:

Dans un processus stationnaire, la première équation de Yule-Walker d'un AR(2) est donnée par :

$R_1=\phi_1+\phi_2R_1$.

Comme on connait R_1 et ϕ_1, alors en ϕ_2 de l'équation antérieure, on obtient :

$$\phi_2=\frac{R_1-\phi_1}{R_1}=\frac{0{,}9-0{,}7}{0{,}9}=0{,}22\,.$$

Exercice 7:

Dans un modèle AR(2), peut-on déduire la valeur de ϕ_2 si on sait que $\phi_1=-0{,}4$ et $R_1=0{,}71$?

Solution 7:

Supposons que le processus cherché est stationnaire. Alors, la première équation de Yule-Walker d'un AR(2) est donnée par : $R_1=\phi_1+\phi_2R_1$.

Comme on connait R_1 et ϕ_1, alors en ϕ_2 de l'équation antérieure, on obtient :

$$\phi_2=\frac{R_1-\phi_1}{R_1}=\frac{0{,}7-0{,}4}{0{,}7}=1{,}57\,.$$

Dans ce cas, on a $\phi_2=1{,}57>1$.

Par conséquent, cette valeur de ϕ_2 ne correspond pas à un AR(2) stationnaire. Ce qui est contradictoire avec la supposition de stationnarité faite et avec le fait que les équations de Yule-Walker ne sont valables que si le processus est stationnaire. D'où, on ne peut pas déduire la valeur de ϕ_2.

Exercice 8:

Dans un modèle AR(2), on sait que $\phi_1=0{,}8$ et $R_2=0{,}6$. Peut-on déduire la valeur de ϕ_2 ?

Solution 8:

Supposons que le processus cherché est stationnaire. Pour pouvoir déduire la valeur de ϕ_2, il sera utile d'utiliser les deux équations de Yule-Walker correspondantes à AR(2).

$R_1=\phi_1+\phi_2R_1$

$R_2=\phi_1R_1+\phi_2$

Dans le système antérieur, on connaît R_2 et ϕ_1 ; par conséquent, les inconnus seront R_1 et ϕ_2. Si de la première équation on dégage R_1 et on la substitue dans la seconde ; on aura :

$$R_2=\phi_1\frac{\phi_1}{1-\phi_2}+\phi_2$$

Après des calculs $\qquad \phi_2^2-(1+R_2)\phi_2+R_2-\phi_1^2=0$

Résolvons l'équation en tenant compte de que ϕ_1=0,8 et R_2=0,6 on obtient les valeurs

$\phi_2^* = 1{,}62$ et $\phi_2^{**} = -0{,}02$

Auxquelles correspondent respectivement les valeurs

$R_1^*=-1{,}29$ et $R_1^{**}=0{,}78$

Comme ϕ_2^* ne vérifie pas les conditions de stationnarité –et en plus la valeur de R_1^* n'a pas de sens-, la valeur de ϕ_2 qui convient sera $\phi_2^{**} = -0{,}02$.

Exercice 9:

Dans le modèle MA(2) inversible $Y_t=\varepsilon_t -1{,}2\varepsilon_{t-1}+0{,}32\varepsilon_{t-2}$

On veut calculer les coefficients π_1, π_2, π_3, π_4 et π_5 du modèle AR(∞) correspondant,

a) En utilisant la méthode des fractions rationnelles,
b) En utilisant l'égalité $\pi(L)\theta(L)=\phi(L)$

Solution 9:

a) Pour appliquer la méthode des fractions rationnelles, on doit calculer d'abord les racines de l'équation $\lambda^2-1{,}2\lambda+0{,}32=0$.
Sa résolution donne $\lambda_1=0{,}8$ et $\lambda_2=0{,}4$.
Le modèle peut s'exprimer comme $\varepsilon_t = \frac{1}{(1-0{,}8L)(1-0{,}4L)}Y_t$
Développant $\frac{1}{(1-0{,}8L)(1-0{,}4L)} = \frac{A}{(1-0{,}8L)} + \frac{B}{(1-0{,}4L)}$
Ce qui donne en éliminant les dénominateurs $1=(1-0{,}4L)A+(1-0{,}8L)B$
Ou encore $1=(A+B)-(0{,}4A+0{,}8B)L$
D'où le système $\begin{cases} A+B=1 \\ 0{,}4A+0{,}8B=0 \end{cases}$
On obtient $A=2$ et $B=-1$.
Par conséquent
$$\varepsilon_t = \left[\frac{2}{1-0{,}8L} - \frac{1}{1-0{,}4L}\right]Y_t$$
$$= \left[2\sum_{j=0}^{\infty}(0{,}8L)^j - \sum_{j=0}^{\infty}(0{,}4L)^j\right]Y_t$$
$=Y_t+1{,}2Y_{t-1}+1{,}12Y_{t-2}+0{,}96Y_{t-3}+0{,}79Y_{t-4}+0{,}65Y_{t-5}+\ldots$

b) Comme c'est un processus de moyenne mobile, l'égalité $\pi(L)\theta(L)=\phi(L)$ est réduite à $\pi(L)\theta(L)=1$. C'est-à-dire, $(1-\pi_1 L-\pi_2 L^2-\pi_3 L^3-\pi_4 L^4 \cdots)(1-\theta_1 L-\theta_2 L^2)=1$

En développant, on aura :

$$1-(\pi_1+\theta_1)L-(\pi_2-\pi_1\theta_1+\theta_2)L^2-(\pi_3-\pi_2\theta_1-\pi_1\theta_2)L^3\dots=1$$

Par identification membre à membre des coefficients des puissances on aura

$$\pi_1=-\theta_1=-1,2$$

$$\pi_2=\pi_1\theta_1-\theta_2=-1,12$$

Pour $j>2$, on peut prouver en continuant le développement antérieur les coefficients π_j suivent l'équation en différences

$$\pi_j=\theta_1\pi_{j-1}+\theta_2\pi_{j-2}$$

Par conséquent

$$\pi_3=-1,2\times1,12+0,32\times1,2=-0,96$$

$$\pi_4=-1,2\times0,96+0,32\times1,12=-0,79$$

$$\pi_5=-1,2\times0,79+0,32\times0,96=-0,64$$

Exercice 10 :

Dans le modèle ARMA(1,1) suivant : $Y_t=0,8Y_{t-1}+\varepsilon_t+0,7\varepsilon_{t-1}$

On demande de:

a) Calculer les coefficients ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 et ψ_5 du modèle MA(∞) correspondant.
b) Calculer les coefficients π_1, π_2, π_3, π_4 et π_5 du modèle AR(∞) correspondant.

Exercice 11 :

Soit le modèle MA(2) suivant : $Y_t=\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\theta_2\varepsilon_{t-2}$

On sait que les racines de l'équation caractéristique $\lambda^2-\theta_1\lambda-\theta_2=0$ sont $\lambda_1=0,6$ et $\lambda_2=0,3$.

Peut-on déterminer les valeurs de θ_1 et θ_2 ?

Exercice 12 :

Soit le modèle ARMA(1,1) suivant : $Y_t=0,6Y_{t-1}+\varepsilon_t-0,6\varepsilon_{t-1}$

a) Calculer la fonction d'auto-corrélation.
b) Peut-on simplifier ce modèle ?

Exercice 13 :

Soit le modèle ARMA(2,2) suivant : $Y_t=0,9Y_{t-1}-0,2Y_{t-2}+\varepsilon_t-1,3\varepsilon_{t-1}+0,4\varepsilon_{t-2}$

Peut-on introduire quelques simplifications à ce modèle ?

Exercice 14 :

Soit le modèle $Yt=1,8Y_{t-1}-0,81Y_{t-2}+\varepsilon_t$

On demande de trouver la solution de l'équation en différences qui génère les coefficients d'auto-corrélation.

Exercice 15 :

Soit le modèle $Yt=0,1Y_{t-1}+0,9Y_{t-2}+\varepsilon_t$

On demande :

a) Analyser les conditions de stationnarité.
b) Dans le cas où le modèle ne soit pas stationnaire, peut-on faire une transformation pour le convertir en stationnaire ?

Exercice 16 :

Soit le modèle $Y_t=-Y_{t-1}+\varepsilon_t$

On considère la transformation $w_t=\Delta Y_t$

Le processus wt est-il stationnaire ?

Exercice 17 :

Soit le modèle $Y_t=\beta_0+\beta_1 t+\beta_2 t^2+\varepsilon_t$

On demande :

a) Ce modèle est-il stationnaire ?
b) On fait la transformation $w_t=\Delta^2 Y_t$, le processus correspondant à w_t est-il stationnaire ?
c) Discuter l'inversibilité du processus résultant.

Exercice 18 :

Soit le modèle $Y_t=(\beta_0+\beta_1 t)e^{\varepsilon_t}$.

On demande :

a) Le modèle proposé, est-il stationnaire en moyenne et en variance ?
b) Si on fait la transformation $w_t=\Delta Y_t$, le modèle transformé est-il stationnaire en moyenne et en variance ?
c) Dans le cas où dans la question b) on n'a pas obtenu un modèle stationnaire, comment peut-on transformer le modèle original à fin qu'il accomplisse les conditions de stationnarité ?

olution 10 :

a) On établie les relations

$$(1+\psi_1 L+\psi_2 L^2+\dots)(1-\phi_1 L)=1-\theta_1 L$$

d'où

$$\psi_1-\phi_1=-\theta_1$$

et pour $j>1$ $\quad \psi_j-\phi_1\psi_{j-1}=0$

Donc ,

$$\psi_1=0,8+0,7=1,5$$
$$\psi_2=0,8\times 1,5=1,2$$
$$\psi_3=0,8\times 1,2=0,96$$
$$\psi_4=0,8\times 0,96=0,77$$
$$\psi_5=0,8\times 0,77=0,61$$

b) On établie les relations

$$(1-\pi_1 L-\pi_2 L^2-\dots)(1-\theta_1 L)=1-\phi_1 L$$

d'où

$$\pi_1+\theta_1=\phi_1$$

et pour $j>1$ $\quad \pi_j-\theta_1\pi_{j-1}=0$

Alors

$$\pi_1=0,8+0,7=1,5$$
$$\pi_2=-0,7\times 1,5=-1,05$$
$$\pi_3=0,7\times 1,05=0,74$$
$$\pi_4=-0,7\times 0,74=-0,52$$
$$\pi_5=0,7\times 0,52=0,36$$

olution 11 :

les racines de l'équation caractéristiques sont

$$\lambda_1=\frac{\theta_1}{2}+\frac{\sqrt{\theta_1^2+4\theta_2}}{2}$$
$$\lambda_2=\frac{\theta_1}{2}-\frac{\sqrt{\theta_1^2+4\theta_2}}{2}$$

A partir des expressions précédentes, on peut voir que

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \theta_1$$

$$\lambda_1 , \lambda_2 = \frac{\theta_1^2}{4} - \frac{(\theta_1^2 + 4\theta_2)}{4} = -\theta_2$$

Par conséquent

$$\theta_1 = 0{,}90$$

$$\theta_2 = -0{,}18$$

olution 12 :

1) A partir des formules des coefficients des auto-cor pour un modèle ARMA (1,1) :

$$R_1 = \frac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 - 2\theta_1\phi_1 + \theta_1^2}$$

$$R_\tau = \phi_1 R_{\tau-1} \quad \text{pour } \tau > 1$$

on obtient

$$R_1 = \frac{(1-(0{,}6)^2)\times 0}{1+0{,}6^2 - 2\times 0{,}6^2} = 0$$

$$\text{et } R_\tau = 0 \quad \text{pour } \tau > 1$$

c'est-à-dire que tous les coefficients d'auto-corrélat sont égaux à zéro.

) Du fait que $R_\tau = 0$ pour tout τ, est du à l'exist d'un facteur commun entre la partie auto-regressive et des moyennes mobiles.

En effet $\quad (1 - 0{,}6L)\, Y_t = (1 - 0{,}6L)\, \varepsilon_t$

En divisant les deux membres par $(1 - 0{,}6L)$, le mod devient réduit à $\quad Y_t = \varepsilon_t \quad$ qui est un bruit b qui se caractérise précisément par $R_\tau = 0$, pour to

olution 13 :

Pour voir si on peut introduire des simplifications, on procéder au calcul des racines des équations caractéri e la partie auto-regressive et de la partie des moyennes

L'équation caractéristique de la partie auto-regressive vie

par $$\lambda_{AR}^2 - 0{,}9\lambda_{AR} + 0{,}2 = 0$$

on obtient $$\lambda_{AR_1} = 0{,}5 \quad \text{et} \quad \lambda_{AR_2} = 0{,}4$$

L'équation caractéristique de la partie des moyennes m

$$\lambda_{MA}^2 - 1{,}3\lambda_{MA} + 0{,}4 = 0$$

on obtient $$\lambda_{MA_1} = 0{,}8 \quad \text{et} \quad \lambda_{MA_2} = 0{,}5$$

Par conséquent, le modèle dans une forme factorisée p

s'exprimer ainsi $$(1-0{,}5L)(1-0{,}4L)Y_t = (1-0{,}8L)(1-$$

Divisons les deux membres par $(1-0{,}5L)$, il en résulte

$$(1-0{,}4L)Y_t = (1-0{,}8L)\varepsilon_t$$

c'est-à-dire $$Y_t = 0{,}4Y_{t-1} + \varepsilon_t - 0{,}8\varepsilon_{t-1}$$

ce qui donne une forme simplifiée du modèle.

ution 14:

'équation qui génère les coefficients d'auto-corrélation est !

différence homogène de second ordre:

$$R_\tau = \phi_1 R_{\tau-1} + \phi_2 R_{\tau-2}$$

our trouver la solution, il faut calculer les racines de l'

actéristique $$\lambda^2 - \phi_1\lambda - \phi_2 = 0$$

n calculant les racines dans le modèle proposé, on obtient

nique racine réelle. $$\lambda_u = 0{,}9$$

Dans ce cas particulier, la solution de l'équation homog

de type $$R_\tau = A_1\lambda_u^\tau + A_2 t\lambda_u$$

ù A_1 et A_2 seront déterminées à partir des valeurs initi

R_0 et R_1. La valeur de R_1 est donnée par:

$$R_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} = \frac{1,8}{1+0,81} = 0,99$$

Donc, pour $\tau = 0$ et $\tau = 1$, on aura :

$$1 = A_1$$
$$0,99 = A_1 0,9 + A_2 \times 1 \times 0,9$$

Par conséquent

$$A_1 = 1 \quad ; \quad A_2 = 0,1$$

et la solution vient donneé par $\quad R_\tau = 0,9^\tau + 0,1 \times \tau \times 0,$

Ainsi pour $\tau = 10$, on obtient $\quad R_{10} = 0,9^{10} + 0,1 \times 10 \times 0,9^{10}$

Pour $\tau = 20$, on obtient $\quad R_{20} = 0,36$

<u>lution 15 :</u>

) Les racines du polynôme caractéristique :

$$1 - 0,1L - 0,9L^2 = 0$$

sont les suivantes : $\quad L_1 = 1 \quad ; \quad L_2 = -1,11$

comme une des racines $L_1 = 1$, le processus n'est pas st

) Vue les racines du modèle obtenues, ce dernier pe factoriser de la forme suivante :

$$(1+0,9L)(1-L)Y_t = \varepsilon_t$$

En faisant

$$w_t = \Delta Y_t = (1-L)Y_t$$

Le processus correspondant à la variable transformée w_t est

$$(1+0,9L)w_t = \varepsilon_t$$

c'est-à-dire

$$w_t + 0,9 w_{t-1} = \varepsilon_t$$

comme $|0,9| < 1$, le processus correspondant à w_t est sta

<u>lution 16 :</u>

En utilisant l'opérateur retard, le modèle peut s'expri ainsi

$$(1+L)Y_t = \varepsilon_t$$

'autre part : $$w_t = \Delta Y_t = (1-L)Y_t$$
où $$Y_t = (1-L)^{-1} w_t$$
n substituant dans le modèle, on obtient
$$(1+L)(1-L)^{-1} w_t = \varepsilon_t$$
c'est-à-dire
$$(1+L) w_t = (1-L)\varepsilon_t$$
$$w_t = -w_{t-1} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$
e processus transformé w_t ne vérifie pas les conditions de sta

olution 17 :

) La moyenne du modèle est :
$$\mu_t = E(Y_t) = E\left[\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \varepsilon_t\right] = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$$
comme la moyenne est différente pour chaque t, le modè stationnaire en moyenne.

) le modèle, dans la période t, est :
$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 t^2 + \varepsilon_t$$
et dans la période t − 1
$$Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 (t-1) + \beta_2 (t-1)^2 + \varepsilon_{t-1}$$
En faisant la différence, membre à membre, on aura :
$$\Delta Y_t = \beta_1 - \beta_2 + 2\beta_2 t + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$
En exprimant l'équation antérieure pour la période t − 1, on
$$\Delta Y_{t-1} = \beta_1 - \beta_2 + 2\beta_2 (t-1) + \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2}$$
En faisant la différence membre à membre, on obtient :
$$w_t = \Delta^2 Y_t = 2\beta_2 + \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}$$
le processus w_t est stationnaire, puisque c'est un processus MA et tous les processus moyennes mobiles d'ordre fini sont statio

) L'équation caractéristique de la partie MA du processus résult donnée par
$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$
les racines de cette équation sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

Donc le processus n'est pas inversible.

olution 18 :

Avant de répondre aux différentes parties de l'exercice, on v la loi de probabilité de e^{ε_t}

. Si $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$ et si on note $v_t = e^{\varepsilon_t}$

alors comme $\ln v_t = \varepsilon_t$, on dit que v_t suit une loi log-
Une variable aléatoire suit une loi log-normale lorsque logarithme népérien de cette variable suit une loi normale).

a moyenne et la variance de v_t sont données par les express uivantes :

$$E(v_t) = e^{\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2}$$

$$E\left(v_t - e^{\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2}\right)^2 = e^{\sigma_\varepsilon^2}\left(e^{\sigma_\varepsilon^2} - 1\right)$$

Pour voir si ce processus est stationnaire en moyenne et en var on va calculer la moyenne et la variance de Y_t :

$$E[Y_t] = [\beta_0 + \beta_1 t]\, E(v_t) = (\beta_0 + \beta_1 t)\, e^{\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2}$$

$$E\left[Y_t - (\beta_0 + \beta_1 t)\, e^{\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2}\right]^2 = E\left[(\beta_0 + \beta_1 t)\, v_t - (\beta_0 + \beta_1 t)\, e^{\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2}\right]^2 =$$

$$= (\beta_0 + \beta_1 t)^2\, E\left(v_t - e^{\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2}\right)^2 = (\beta_0 + \beta_1 t)^2\, e^{\sigma_\varepsilon^2}\left(e^{\sigma_\varepsilon^2} - 1\right)$$

e modèle est, donc, non stationnaire en moyenne, ni en varian uisque les deux paramètres dépendent du t.

, si on fait $W_t = \Delta Y_t$, le modèle transformé sera :

$$W_t = Y_t - Y_{t-1} = (\beta_0 + \beta_1 t)\, e^{\varepsilon_t} - [\beta_0 + \beta_1(t-1)]\, e^{\varepsilon_{t-1}}$$

la moyenne et la variance de W_t sont les suivantes :

$$E(W_t) = (\beta_0 + \beta_1 t)\, e^{\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2} - [\beta_0 + \beta_1(t-1)]\, e^{\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2} = \beta_1\, e^{\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2}$$

$$E\left[W_t - \beta_1 e^{\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2}\right]^2 = E\Big[\left[(\beta_0 + \beta_1 t)\, e^{\varepsilon_t} - (\beta_0 + \beta_1(t-1))\, e^{\varepsilon_{t-1}}\right]$$

$$- \left[(\beta_0 + \beta_1 t)\, e^{\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2} - (\beta_0 + \beta_1(t-1))\, e^{\frac{1}{2}}\right.$$

Si on développe cette dernière expression, on voit clairem la variance de W_t dépend de t.

Donc W_t est stationnaire en moyenne, mais il n'est pas en variance. En plus, la loi de probabilité de W_t n'est normale mais c'est la loi log-normale.

On définit le processus

$$Z_t = \Delta \operatorname{Ln} Y_t = \operatorname{Ln}(\beta_0 + \beta_1 t) + \varepsilon_t - \operatorname{Ln}[\beta_0 + \beta_1 (t-$$

Sa moyenne et sa variance sont les suivantes :

$$E(Z_t) = \operatorname{Ln}(\beta_0 + \beta_1 t) - \operatorname{Ln}[\beta_0 + \beta_1(t-1)] = \operatorname{Ln} \frac{\beta_0 + \beta_1 t}{\beta_0 + \beta_1 (t}$$

lorsque t croît, $E(Z_t)$ tend vers 0.

D'autre part,

$$\begin{aligned} Var(Z_t) &= E\Big[\operatorname{Ln}(\beta_0 + \beta_1 t) + \varepsilon_t - \operatorname{Ln}[\beta_0 + \beta_1(t-1)] - \varepsilon_{t-1} \\ &\quad - \operatorname{Ln}(\beta_0 + \beta_1 t) + \operatorname{Ln}[\beta_0 + \beta_1(t-1)]\Big]^2 \\ &= E(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2 = 2\sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

Le processus Z_t est stationnaire en variance et tend à être stationnaire en moyenne lorsque t croît.

<u>Référence</u> :

Ezequiel URIEL : "Análisis de series temporal Modelos ARIMA", collection ábaco, Paraninfo (S.A Tercera Edición, 1995. (Madrid, Spain).