Le Modèle AR(3) :

- Le modèle est donnée par : $Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \Phi_3 Y_{t-3} + \varepsilon_t$

- En utilisant l'opérateur des retards : $(1 - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 - \Phi_3 L^3) Y_t = \varepsilon_t$

- Pour que le processus soit stationnaire ; il faut que les racines de l'équation polynomiale $\Phi(L) = 0$ tombent ~~en~~ en dehors du cercle d'unité, soit $|L_i| > 1$

- L'espérance de ce modèle est nulle : $E(Y_t) = 0$; si les conditions de ~~sat~~ stationnarité sont vérifiées.

- Les autocovariances

  - si on multiplie les 2 membres de l'équation Y_t par $Y_{t-\tau}$, et on prend des espérances, on obtient :

$$E[Y_t Y_{t-\tau}] = \Phi_1 E[Y_{t-1} Y_{t-\tau}] + \Phi_2 E[Y_{t-2} Y_{t-\tau}] + \Phi_3 E[Y_{t-3} Y_{t-\tau}] + \underbrace{E[\varepsilon_t Y_{t-\tau}]}_{\sigma_\varepsilon^2}$$

  - Pour $\tau = 0$, on obtient :

$$\gamma_0 = \Phi_1 \gamma_1 + \Phi_2 \gamma_2 + \Phi_3 \gamma_3 + \sigma_\varepsilon^2$$

  - Pour des valeurs de $\tau > 0$, on aura :

$$\gamma_\tau = \Phi_1 \gamma_{\tau-1} + \Phi_2 \gamma_{\tau-2} + \Phi_3 \gamma_{\tau-3} \qquad \tau > 0$$

- Les autocorrélations :

  - $R_\tau = \Phi_1 R_{\tau-1} + \Phi_2 R_{\tau-2} + \Phi_3 R_{\tau-3}$

  - La condition initiale : $R_0 = 1$

  - Pour $\tau = 1$

$$R_1 = \Phi_1 + \Phi_2 R_1 + \Phi_3 R_2$$

  - Pour $\tau = 2$

$$R_2 = \Phi_1 R_1 + \Phi_2 + \Phi_3 R_1$$

  - Si on remplace R_2 par sa valeur dans R_1, on obtient :

$$R_1 = \Phi_1 + \Phi_2 R_1 + \Phi_3 R_2$$

$$R_1 = \Phi_1 + \Phi_2 R_1 + \Phi_3 \times \left[\Phi_1 R_1 + \Phi_2 + \Phi_3 R_1\right]$$

$$R_1 = \Phi_1 + \Phi_2 R_1 + \Phi_1 \Phi_3 R_1 + \Phi_2 \Phi_3 + \Phi_3^2 R_1$$

$$R_1 - \Phi_2 R_1 - \Phi_1 \Phi_3 R_1 - \Phi_3^2 R_1 = \Phi_1 + \Phi_2 \Phi_3$$

$$\left[1 - \Phi_2 - \Phi_1 \Phi_3 - \Phi_3^2\right] R_1 = \Phi_1 + \Phi_2 \Phi_3$$

$$\boxed{R_1 = \frac{\Phi_1 + \Phi_2 \Phi_3}{1 - \Phi_2 - \Phi_1 \Phi_3 - \Phi_3^2}}$$

Modèle MA(3) :

Un modèle MA(3) est donné par

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \theta_3 \varepsilon_{t-3}$$
$$= (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \theta_3 L^3)\varepsilon_t$$

Multiplions les deux membres par $Y_{t-\tau}$ et prenons des espérances, il en résulte

$$E(Y_t Y_{t-\tau}) = E\left[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \theta_3 \varepsilon_{t-3})(\varepsilon_{t-\tau} - \theta_1 \varepsilon_{t-1-\tau} - \theta_2 \varepsilon_{t-2-\tau} - \theta_3 \varepsilon_{t-3-\tau})\right]$$

Pour différentes valeurs de τ, on obtient les résultats suivants :

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)\sigma_\varepsilon^2 \quad \text{pour } \tau = 0$$

$$\gamma_1 = (-\theta_1 + \theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_3)\sigma_\varepsilon^2 \quad \text{lorsque } \tau = 1$$

$$\gamma_2 = (-\theta_2 + \theta_1\theta_3)\sigma_\varepsilon^2 \quad \text{pour } \tau = 2$$

$$\gamma_3 = (-\theta_3)\sigma_\varepsilon^2 \quad \text{pour } \tau = 3$$

$$\gamma_\tau = 0 \quad \text{pour } \tau > 3$$

A partir des expressions antérieures, on obtient facilement les coefficients d'autocorrélation :

$$R_0 = 1$$

$$R_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_3}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}$$

$$R_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{-\theta_2 + \theta_1\theta_3}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}$$

$$R_3 = \frac{-\theta_3}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \quad \text{et } R_\tau = 0 \quad \text{pour } \tau > 3$$

Exercice :

1) Déterminer les corrélations des processus suivants :

a) Le processus MA(2) ; $Y_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$

b) Le processus MA(3) ; $Y_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \theta_3 \varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t$

2) Calculer les corrélations (et tracer le corrélogramme) dans les cas suivants :

a) MA(2) : $\theta_1 = \frac{-5}{6}$; $\theta_2 = \frac{1}{6}$

b) MA(2) : $\theta_1 = 0{,}8$; $\theta_2 = 0{,}5$

c) MA(3) : $\theta_1 = 0{,}8$; $\theta_2 = -0{,}4$; $\theta_3 = -0{,}3$

3) Examiner les deux processus MA(2) précédent si sont inversibles

Solution :

1) a) $Y_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$

Si on multiplie les deux membres de ce modèle par $Y_{t-\tau}$ et on prend des espérances mathématique, on aura :

$$E(Y_t Y_{t-\tau}) = E\left((\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-\tau} + \theta_1 \varepsilon_{t-\tau-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-\tau-2})\right)$$

Pour différentes valeurs de τ, on obtient les expressions suivantes :

$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2$ lorsque $\tau = 0$

$\gamma_1 = (\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma_\varepsilon^2$ lorsque $\tau = 1$

$\gamma_2 = (\theta_2)\sigma_\varepsilon^2$ lorsque $\tau = 2$

$\gamma_\tau = 0$ pour $\tau > 2$

A partir des expressions précédentes, on obtient facilement les coefficients d'autocorrélations :

$$R_0 = 1$$

$$R_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$R_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

et $R_\tau = 0$ pour $\tau > 2$

b) $Y_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \theta_3 \varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t$

Si on multiplie les deux membres de ce modèle par $Y_{t-\tau}$ et on prend des espérances mathématiques, on obtient

$$E(Y_t Y_{t-\tau}) = E\Big((\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \theta_3 \varepsilon_{t-3})(\varepsilon_{t-\tau} + \theta_1 \varepsilon_{t-\tau-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-\tau-2} + \theta_3 \varepsilon_{t-\tau-3})\Big)$$

Pour différentes valeurs de τ, on obtient les résultats suivants :

$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)\,\sigma_\varepsilon^2$ lorsque $\tau = 0$

$\gamma_1 = (\theta_1 + \theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_3)\,\sigma_\varepsilon^2$ lorsque $\tau = 1$

$\gamma_2 = (\theta_2 + \theta_1\theta_3)\,\sigma_\varepsilon^2$ lorsque $\tau = 2$

$\gamma_3 = (\theta_3)\,\sigma_\varepsilon^2$ lorsque $\tau = 3$

$\gamma_\tau = 0$ pour $\tau > 3$

A partir des expressions précédentes, on obtient facilement les coefficients d'auto-corrélations :

$$R_0 = 1$$

$$R_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\theta_1 + \theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_3}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}$$

$$R_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{\theta_2 + \theta_1\theta_3}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}$$

$$R_3 = \frac{\theta_3}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}$$

$R_\tau = 0$ pour $\tau > 3$

2) a) $\theta_1 = -\frac{5}{6}$ $\qquad \theta_2 = \frac{1}{6}$ $\qquad$ MA(2)

$\theta_1^2 = \frac{25}{36}$ $\qquad \theta_2^2 = \frac{1}{36}$

$\theta_1\theta_2 = -\frac{5}{36}$ $\qquad R_1 = \frac{\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$

$R_1 = \frac{-35}{62} \simeq -0{,}56$

$R_2 = \frac{\theta_2^2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{1}{62} \simeq 0{,}02$

et $R_\tau = 0$ pour $\tau > 2$

b) $\theta_1 = 0{,}8 \qquad \theta_2 = 0{,}5$ MA(2)

$\theta_1^2 = 0{,}64 \qquad \theta_2^2 = 0{,}25$

$\theta_1\theta_2 = 0{,}4$

$1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 = 1{,}89$

$$R_1 = \frac{\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} = \frac{0{,}8+0{,}4}{1{,}89} = \frac{1{,}2}{1{,}89} \simeq 0{,}63$$

$$R_2 = \frac{\theta_2^2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} = \frac{0{,}25}{1{,}89} \simeq 0{,}13$$

et $R_\tau = 0$ pour $\tau > 2$

c) MA(3)

$\theta_1 = 0{,}8 \qquad \theta_2 = -0{,}4 \qquad \theta_3 = -0{,}3$

$1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = 1 + 0{,}64 + 0{,}16 + 0{,}09 = 1{,}89$

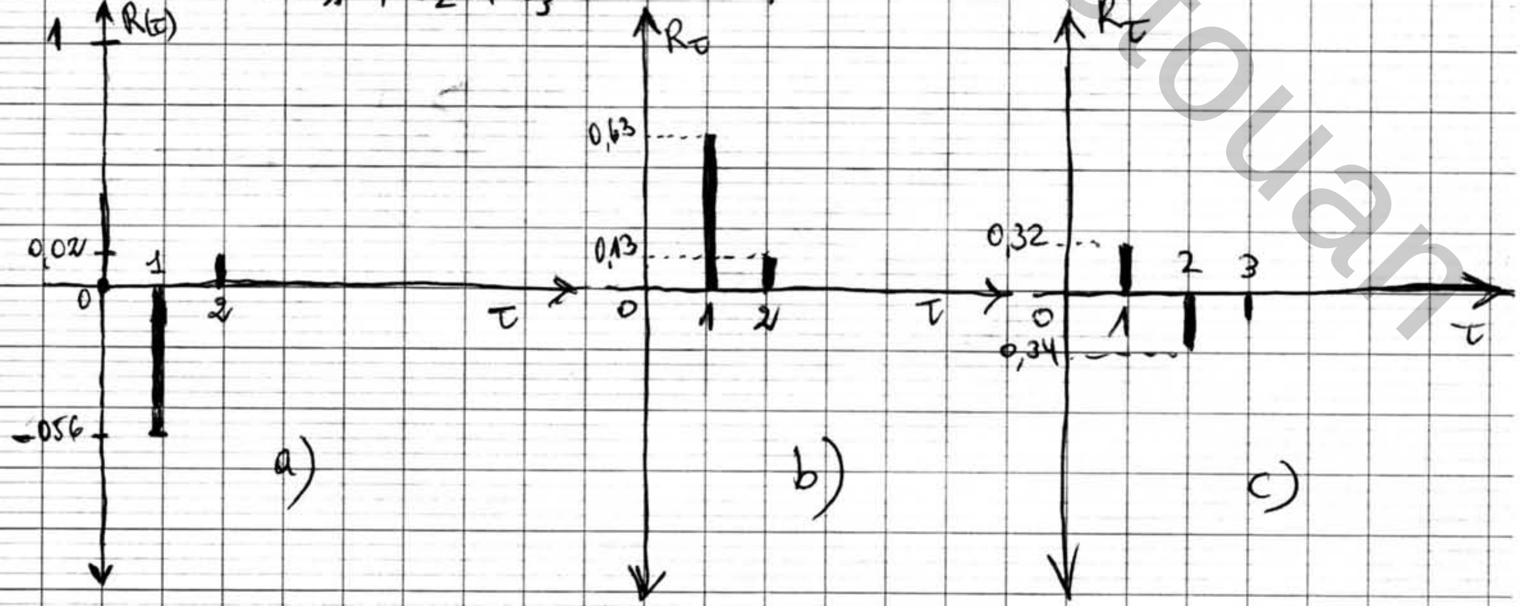
$$R_1 = \frac{\theta_1 + \theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_3}{1+\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2} = \frac{0{,}8 + 0{,}8(-0{,}4) + (-0{,}4)(-0{,}3)}{1{,}89}$$

$$R_1 = \frac{0{,}48 + 0{,}12}{1{,}89} = \frac{0{,}6}{1{,}89} \simeq 0{,}32$$

$$R_2 = \frac{\theta_2 + \theta_1\theta_3}{1+\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2} = \frac{-0{,}4 + (0{,}8)(-0{,}3)}{1{,}89} = \frac{-0{,}4 - 0{,}24}{1{,}89}$$

$$R_2 = \frac{-0{,}64}{1{,}89} \simeq -0{,}34$$

$$R_3 = \frac{\theta_3}{1+\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2} = \frac{-0{,}3}{1{,}89} \simeq -0{,}16$$



3) Un processus MA est toujours stationnaire

Pour qu'un processus MA(2) soit inversible, il faut que les racines du ~~l'équation~~ polynôme caractéristique tombent en dehors du cercle unité.

On a :
$$Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$
$$= (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2)\,\varepsilon_t$$

dans ce cas le polynôme caractéristique est :
$$1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 = 0$$

a) $\theta_1 = -\frac{5}{6}$ $\qquad \theta_2 = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{6} L^2 - \frac{5}{6} L + 1 = 0$ est le polynôme caractéristique

ses racines réels (son $\Delta = \frac{1}{36} > 0$) sont $L_1 = 2 > 1$ et $L_2 = 3 > 1$

donc ce processus est inversible.

b) $\theta_1 = 0{,}8$ $\qquad \theta_2 = 0{,}5$

le polynôme caractéristique dans ce cas est :
$$0{,}5 L^2 + 0{,}8 L + 1 = 0$$
$$\Delta = -1{,}36 < 0$$

Alternativement, on peut utiliser les conditions d'inversibilité en un modèle MA(2), appliquées directement sur les paramètres et qui sont
$$\theta_1 + \theta_2 < 1$$
$$-\theta_1 + \theta_2 < 1$$
$$\theta_2 > -1$$

Dans ce modèle on a :
$$\theta_1 + \theta_2 = 0{,}8 + 0{,}5 = 1{,}3 > 1 \Rightarrow \text{non vérifiée !}$$
$$-\theta_1 + \theta_2 = -0{,}8 + 0{,}5 = -0{,}3 < 1 \text{ vérifiée}$$
$$\theta_2 = 0{,}5 > -1 \text{ vérifiée}$$

Donc par cette méthode alternative, le processus n'est pas inversible !

Exercice :

Obtenez en partant directement du système de Yule-Walker les cinq premières corrélations pour un processus AR(2), avec

a) $\phi_1 = 0{,}6$; $\phi_2 = -0{,}2$

b) $\phi_1 = -0{,}6$; $\phi_2 = 0{,}2$

Calculer aussi la variance γ_0

Tracer les corrélations

Solution :

le système de Yule-Walker pour AR(2) est :

$$\begin{cases} R_1 = \phi_1 + \phi_2 R_1 \\ R_2 = \phi_1 R_1 + \phi_2 \end{cases}$$

où le modèle AR(2) est : $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$

a) on a : $R_1 = \phi_1 + \phi_2 R_1$

$$\Rightarrow R_1 - \phi_2 R_1 = \phi_1$$

$$\Rightarrow R_1 (1 - \phi_2) = \phi_1$$

$$\Rightarrow \boxed{R_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}}$$

Si $\phi_1 = 0{,}6$ et $\phi_2 = -0{,}2$

alors $\boxed{R_1 = \frac{0{,}6}{1{,}2} = 0{,}5}$

Pour

* $\boxed{R_2 = \phi_1 R_1 + \phi_2 = 0{,}6 \times 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}1}$

on a :

* $R_\tau = \phi_1 R_{\tau-1} + \phi_2 R_{\tau-2}$; $\tau > 2$

donc $R_3 = \phi_1 R_2 + \phi_2 R_1$

$R_3 = 0{,}6 \times 0{,}1 + (-0{,}2) \times 0{,}5$

$\boxed{R_3 = -0{,}04}$

$$R_4 = \phi_1 R_3 + \phi_2 R_2$$

$$R_4 = 0{,}6 \times (-0{,}04) + (-0{,}2) \times (0{,}1)$$

$$\boxed{R_4 = -0{,}044}$$

$$R_5 = \phi_1 R_4 + \phi_2 R_3$$

$$R_5 = (0{,}6) \times (-0{,}044) + (-0{,}2) \times (-0{,}04)$$

$$\boxed{R_5 = -0{,}0184}$$

La variance :

$$\gamma_0 = \frac{1 - \phi_2}{[1+\phi_2]\left[(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2\right]} \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_0 = \frac{1+0{,}2}{[1-0{,}2]\left[(1+0{,}2)^2 - (0{,}6)^2\right]} \sigma_\varepsilon^2$$

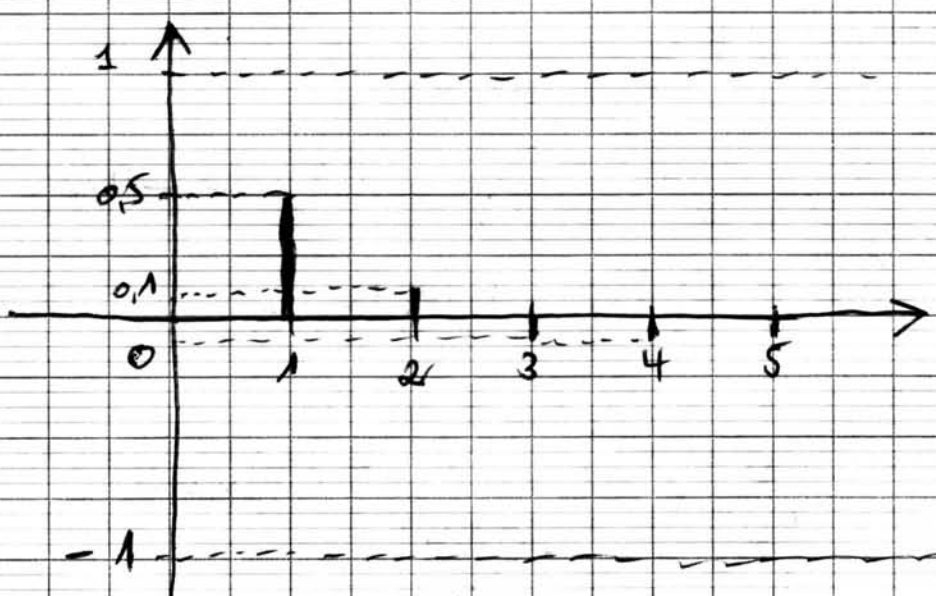
si $\sigma_\varepsilon^2 = 1$

alors $\gamma_0 = \dfrac{1{,}2}{(0{,}8)\left[(1{,}2)^2 - (0{,}6)^2\right]} = 1{,}389$

si $\sigma_\varepsilon^2 = 2$

alors $\gamma_0 = 1{,}389 \times 2 = 2{,}778$

si $\sigma_\varepsilon^2 = 3$; $\gamma_0 = 4{,}167$



b) $\phi_1 = -0{,}6$ $\phi_2 = 0{,}2$

* $R_1 = \phi_1 + \phi_2 R_1 \Rightarrow R_1(1-\phi_2) = \phi_1$

$$\Rightarrow \boxed{R_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} = \frac{-0{,}6}{1-0{,}2} = -0{,}75}$$

* $R_2 = \phi_1 R_1 + \phi_2$

$= (-0{,}6)\times(-0{,}75) + 0{,}2$

$= 0{,}45 + 0{,}2 = \boxed{0{,}65}$

* Pour $\tau > 2$, on a : $R_\tau = \phi_1 R_{\tau-1} + \phi_2 R_{\tau-2}$

$R_3 = \phi_1 R_2 + \phi_2 R_1$

$= (-0{,}6)\times(0{,}65) + (0{,}2)\times(-0{,}75)$

$\boxed{R_3 = -0{,}54}$

* $R_4 = \phi_1 R_3 + \phi_2 R_2$

$= (-0{,}6)\times(-0{,}54) + (0{,}2)\times(0{,}65)$

$\boxed{R_4 = 0{,}454}$

* $R_5 = \phi_1 R_4 + \phi_2 R_3$

$= (-0{,}6)\times(0{,}454) + (0{,}2)\times(-0{,}54)$

$\boxed{R_5 = -0{,}3804}$

La variance :

$$\gamma_0 = \frac{1-\phi_2}{(1+\phi_2)\left[(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2\right]}\sigma_\varepsilon^2$$

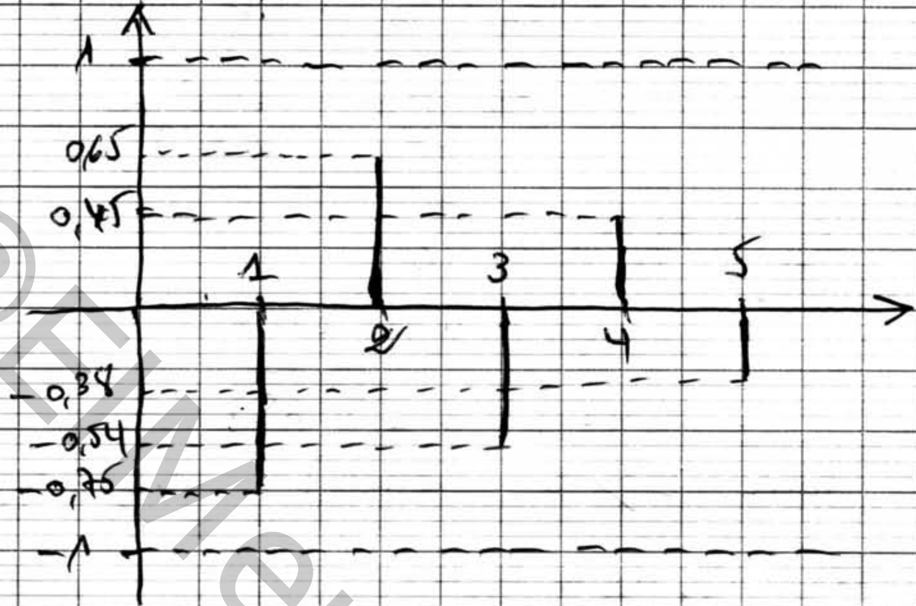
$$= \frac{1-0{,}2}{(1+0{,}2)\left[(1-0{,}2)^2 - (-0{,}6)^2\right]}\sigma_\varepsilon^2$$

$$= 2{,}381 \times \sigma_\varepsilon^2$$

si $\sigma_\varepsilon^2 = 1$, alors $\gamma_0 = 2{,}381$

si $\sigma_\varepsilon^2 = 2$; alors $\gamma_0 = 4{,}762$

si $\sigma_\varepsilon^2 = 3$; alors $\gamma_0 = 7{,}143$



Exercice :

On considère le modèle AR(2) :

$$Y_t = -0{,}8\,Y_{t-1} + 0{,}1\,Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

1°) Ce processus est-il stationnaire ?

2°) Ce processus est-il inversible ? Donner si c'est possible sa représentation en moyennes mobiles infinies.

3°) Calculer ses cinq premières auto-corrélations.

Solution :

1°) Ce processus est stationnaire si les racines de l'équation $1 + 0{,}8L - 0{,}1L^2 = 0$ tombent en dehors du cercle unité.

$$\Delta = (0{,}8)^2 - 4 \times (-0{,}1) = 1{,}04$$

$$L_{1,2} = \frac{-0{,}8 \pm \sqrt{1{,}04}}{2(-0{,}1)}$$

$$L_1 = -1{,}1 \quad \text{et} \quad L_2 = 9{,}1$$

Comme $|L_1| > 1$ et $|L_2| > 1$, il est stationnaire

$$\lambda_1 = \frac{1}{L_1} = -0{,}91 \quad ; \quad \lambda_2 = \frac{1}{L_2} = 0{,}11$$

de même $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$

2°) Un processus AR d'ordre fini est toujours inversible par définition.

Donnons, donc, sa représentation comme un MA(∞)

1ère méthode: Par application du procédé des fractions rationnelles, on obtient :

$$Y_t = \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\,\frac{1}{1-\lambda_1 L} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\,\frac{1}{1-\lambda_2 L}\right]\varepsilon_t$$

avec $\lambda_1 = -0{,}91$ et $\lambda_2 = 0{,}11$

$$Y_t = \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_1 L)^j - \frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_2 L)^j\right]\varepsilon_t$$

$$= \left[\frac{+0{,}91}{+0{,}91+0{,}11}\sum_{j=0}^{\infty}(-0{,}91L)^j + \frac{0{,}11}{0{,}91+0{,}11}\sum_{j=0}^{\infty}(0{,}11L)^j\right]\varepsilon_t$$

$$= \left[0{,}89\sum_{j=0}^{\infty}(-0{,}91L)^j + 0{,}11\sum_{j=0}^{\infty}(0{,}11L)^j\right]\varepsilon_t$$

$$= 0{,}89\Big(\varepsilon_t + (-0{,}91)\varepsilon_{t-1} + (-0{,}91)^2\varepsilon_{t-2} + (-0{,}91)^3\varepsilon_{t-3} + (-0{,}91)^4\varepsilon_{t-4} + (-0{,}91)^5\varepsilon_{t-5} + \cdots\Big) + 0{,}11\Big(\varepsilon_t + (0{,}11)\varepsilon_{t-1} + (0{,}11)^2\varepsilon_{t-2} + (0{,}11)^3\varepsilon_{t-3} + (0{,}11)^4\varepsilon_{t-4} + (0{,}11)^5\varepsilon_{t-5} + \cdots\Big)$$

$$= \varepsilon_t + (-0{,}8)\varepsilon_{t-1} + (0{,}74)\varepsilon_{t-2} + (-0{,}67)\varepsilon_{t-3} + (0{,}611)\varepsilon_{t-4} + (-0{,}55)\varepsilon_{t-5} + \cdots$$

2ème méthode:

A partir du système $\Psi(L)\Phi(L) = 1$, on obtient les relations suivantes:

$$\Psi_1 - \Phi_1 = 0$$

$$\Psi_2 - \Psi_1\Phi_1 - \Phi_2 = 0$$

Pour $j > 0$, on obtient l'équation

$$\Psi_j = \Phi_1\Psi_{j-1} + \Phi_2\Psi_{j-2}$$

Pour les valeurs données

$$\phi_1 = -0,8 \quad \text{et} \quad \phi_2 = 0,1$$

on obtient :

$$\psi_1 = -0,8$$

$$\psi_2 = 0,74$$

$$\psi_3 = -0,67$$

$$\psi_4 = 0,611$$

$$\psi_5 = -0,55$$

3°) Les cinq premières auto-corrélations :

on a : $R_1 = \dfrac{\phi_1}{1-\phi_2}$ pour AR(2) avec

$\phi_1 = -0,8$ et $\phi_2 = 0,1$

donc $\boxed{R_1 = -0,89}$

$R_2 = \phi_1 R_1 + \phi_2$ donc $\boxed{R_2 = 0,812}$

Pour $\tau > 2$ $\quad R_\tau = \phi_1 R_{\tau-1} + \phi_2 R_{\tau-2}$

alors $R_3 = \phi_1 R_2 + \phi_2 R_1$

$$\boxed{R_3 = -0,739}$$

$R_4 = \phi_1 R_3 + \phi_2 R_2$ d'où $\boxed{R_4 = 0,672}$

et $R_5 = \phi_1 R_4 + \phi_2 R_3$ d'où $\boxed{R_5 = -0,611}$.

Exercice :

Soit (Y_t) un processus ARMA (1,1) vérifiant l'équation $Y_t - 0,5\, Y_{t-1} = \varepsilon_t + 0,4\, \varepsilon_{t-1}$ avec (ε_t) un bruit blanc.

(i) Préciser si le processus est stationnaire, inversible.

(ii) Trouver les coefficients (ψ_j) de sa représentation comme processus MA(∞) et les coefficients (π_j) de sa représentation comme processus AR(∞).

Solution:

(i) Stationnarité:

Pour que ce processus soit stationnaire, il faut que la racine de l'équation $1 - 0{,}5L = 0$ tombe endehors du cercle unité.

En effet $L = \frac{1}{0{,}5} = 2$ donc $|L| > 2$ et le processus est stationnaire.

Inversibilité:

Pour que le modèle soit inversible, il faut que la racine de l'équation $1 + 0{,}4L = 0$ soit endehors du cercle unité.

En effet $L = \frac{-1}{0{,}4} = -2{,}5$ donc $|L| > 1$ le processus est inversible

(ii) Représentation comme MA(∞) et recherche des ψ_j:

Des relations $(1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \ldots)(1 - \phi_1 L) = 1 - \theta_1 L$

on obtient
$$\psi_1 = \phi_1 - \theta_1$$
$$\psi_2 = \phi_1 \psi_1$$
et Pour $\tau > 1$ $\psi_\tau = \phi_1 \psi_{\tau-1}$

Par conséquent:
$$\psi_1 = 0{,}5 + 0{,}4 = 0{,}9 \quad \text{car } \phi_1 = 0{,}5 \text{ et } \theta_1 = -0{,}4$$
$$\psi_2 = 0{,}5 \times 0{,}9 = 0{,}45$$
$$\psi_3 = 0{,}5 \times 0{,}45 = 0{,}225$$
$$\psi_4 = 0{,}5 \times 0{,}225 = 0{,}1125$$
$$\psi_5 = 0{,}5 \times 0{,}1125 = 0{,}05625$$

Représentation comme AR(∞) et recherche des π_j:

On établit les relations:
$$(1 - \pi_1 L - \pi_2 L^2 - \ldots)(1 - \theta_1 L) = 1 - \phi_1 L$$
d'où $\pi_1 + \theta_1 = \phi_1$ ou encore $\pi_1 = \phi_1 - \theta_1$

et pour $j > 1$; $\pi_j - \theta_1 \pi_{j-1} = 0$

d'où $\pi_j = \theta_1 \pi_{j-1}$ pour $j > 1$

Par conséquent : $\pi_1 = 0,5 + 0,4 = 0,9$

$\pi_2 = \theta_1 \pi_1 = -0,4 \times 0,9 = -0,36$

$\pi_3 = \theta_1 \pi_2 = 0,4 \times 0,36 = 0,144$

$\pi_4 = \theta_1 \pi_3 = -0,4 \times 0,144 = -0,0576$

$\pi_5 = \theta_1 \pi_4 = 0,4 \times 0,0576 = 0,02304$.

Exercice :

Chercher les conditions de stationnarité et d'inversibilité des processus :

① . MA(1) : $Y_t = \varepsilon_t + 0,8\,\varepsilon_{t-1}$

② . MA(1) : $Y_t = \varepsilon_t - 0,8\,\varepsilon_{t-1}$

③ . MA(2) : $Y_t = \varepsilon_t + 0,6\,\varepsilon_{t-1} - 0,3\,\varepsilon_{t-2}$

④ . AR(1) : $Y_t = 0,9\,Y_{t-1} + \varepsilon_t$

⑤ . AR(1) : $Y_t = -0,9\,Y_{t-1} + \varepsilon_t$

⑥ . AR(2) : $Y_t = Y_{t-1} - 0,1\,Y_{t-2} + \varepsilon_t$

⑦ . ARMA(1,1) : $Y_t = 0,8\,Y_{t-1} + \varepsilon_t - 0,7\,\varepsilon_{t-1}$

Solution :

① Un processus MA est toujours stationnaire.
Il est inversible si la racine de l'équation : $1 + 0,8L = 0$ soit à l'extérieur du cercle unité.

En effet ; $|L| = \left|\frac{-1}{0,8}\right| = |-1,25| > 1$

Il est bien inversible.

② Un processus MA est toujours stationnaire.
Il est inversible si la racine de l'équation : $1 - 0,8L = 0$ soit à l'extérieur du cercle unité.

En effet : $|L| = \left|\frac{1}{0,8}\right| = |1,25| > 1$

Ce processus est inversible.

③ Un processus MA est toujours stationnaire
Ce processus est inversible si les racines de l'équation

$$1 + 0,6L - 0,3L^2 = 0$$

$$\Delta = (0,6)^2 - 4 \times (-0,3) = 1,56$$

$$L_1 = \frac{-0,6 + 1,25}{2(-0,3)} = 1,083$$

$$L_2 = \frac{-0,6 - 1,25}{2(-0,3)} = 3,083$$

Comme $|L_1| > 1$ et $|L_2| > 1$, ce processus est inversible.

(4) Un processus AR est toujours inversible.

Il est stationnaire lorsque la racine de l'équation $1 - 0,9L = 0$ est à l'extérieur du cercle unité.

$$1 - 0,9L = 0 \iff L = \frac{1}{0,9} = 1,11$$

Comme $|L| = |1,11| > 1$, ce processus est bien stationnaire

(5) Même chose que (4) ; ici $L = -1,11$

aussi $|L| = |-1,11| > 1$, donc il est stationnaire et toujours inversible car c'est un processus AR d'ordre fini.

(6) C'est un processus AR d'ordre fini, d'où il est inversible

Il est stationnaire si les racines de l'équation $1 - L + 0,1L^2 = 0$ sont à l'extérieur du cercle unité.

En effet : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (0,1) = 0,6$

$$L_1 = \frac{1 + \sqrt{0,6}}{0,2} = 8,87 \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{1 - \sqrt{0,6}}{0,2} = 1,13$$

comme $|L_1| > 1$ et $|L_2| > 1$, ce processus est stationnaire.

(7). Les conditions de stationnarité et d'inversibilité d'un processus ARMA sont respectivement données par la partie AR et la partie MA de l'ARMA.

. Pour que le processus soit stationnaire, il faut que les racines de l'équation $1 - \Phi_1 L = 0$ tombent en dehors du cercle unité. Ici $1 - 0,8L = 0$, sa racine est $L = \frac{1}{0,8} = 1,25$

$|L| > 1$, donc il est stationnaire

. Pour que le processus soit inversible, il faut que les racines de l'équation $1 - \theta_1 L = 0$ tombent en dehors du cercle unité.

Ici $1 - 0,7L = 0$, sa racine est $L = \frac{1}{0,7} = 1,43$

$|L| > 1$, donc le modèle est inversible.