**Université Abdelmalek Essaâdi**
**Faculté des Sciences de Tétouan**
**Département de Mathématiques**

**Année universitaire : 2017/2018**
**S.M.A.**
**Semestre 6**

# T.D. de Probabilités 2
# Série n°1

**Exercice 1** :
Soit $\Omega$ un ensemble , $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}\ (\Omega)$ et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}\ (\Omega)$.
Montrer que : $\mathcal{A} \subset \mathcal{C} \Longrightarrow \sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{C})$.
où $\sigma(\mathcal{A})$ et $\sigma(\mathcal{C})$ sont respectivement les tribus engendrées par $\mathcal{A}$ et par $\mathcal{C}$.

**Exercice 2** :
Montrer que l'intersection de deux tribus est une tribu, mais la réunion de deux tribus n'est pas, en général, une tribu.

**Exercice 3** :
Soit $\mathcal{B}$ une tribu sur $\Omega$. Montrer que :

1. $\emptyset \in \mathcal{B}$.
2. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille (finie ou infinie) d'évènements de $\mathcal{B}$ ; alors $\cap_{i\in I} A_i \in \mathcal{B}$.
3. Si $A \in \mathcal{B}$ et $B \in \mathcal{B}$ alors : $A - B$ et $A\Delta B \in \mathcal{B}$.
4. Pour $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements associées à un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, on a :
$$\limsup_n A_n = \cap_{n\geqslant 0}(\cup_{k\geqslant n} A_k) \in \mathcal{B}$$
$$\liminf_n A_n = \cup_{n\geqslant 0}(\cap_{k\geqslant n} A_k) \in \mathcal{B}.$$
Montrer que (Inégalités de Fatou) :
(a) $P(\liminf_n A_n) \leqslant \liminf_n P(A_n)$
(b) $\limsup_n P(A_n) \leqslant P(\limsup_n A_n)$.
5. Soit $B \subset \Omega$ et $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de $\Omega$.
Montrer que :
(a) $\limsup_n (B - A_n) = B - \liminf_n A_n$
(b) $\liminf_n (B - A_n) = B - \limsup_n A_n$.

**Exercice 4** :

1. Montrer que si $A$ et $B$ sont deux évènements indépendants tels que $A$ entraîne $B$, alors on a : ou $P(B) = 1$ ou $P(A) = 0$.
2. Montrer que si $A$ est indépendant de lui-même alors $P(A) = 0$ ou 1.
3. Montrer que si $P(A) = 0$ ou 1, alors $A$ est indépendant de tout évènement.
4. En déduire que la relation d'inépendance n'est pas transitive.

**Exercice 5** :
Soient $A, B, C$ trois évènements tels que $A$ et $B$ sont indépendants conditionnellement à $C$ et à $C^c$ et que $A$ et $C$ sont indépendants. Montrer que $A$ et $B$ sont alors indépendants.