Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2017/2018
Masters
MAP et MAF

T.D. de Calcul Stochastique
Série n°2

Exercice 1 :
Montrer que la famille $(X_i, i \in I)$ de v.a. est indépendantes si, et seulement si,

$$E(\Pi_{i\in J} f_i(X_i)) = \Pi_{i\in J} E(f_i(X_i))$$

pour toute famille finie $\{f_i, i \in J\}$; $(J \subset I)$ de fonctions boréliennes bornées.

Exercice 2 :
Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ une suite de v.a. est indépendantes et de fonctions de répartition commune $F(x) = P(X_i \leqslant x)$.
Soit N une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de fonction génératrice g.
[On rappelle que la fonction génératrice g est définie par $g(s) = E[s^N] = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} s^N P(N = n)$].
Montrer que si N est indépendante des $(X_n)_n$, alors $Max(X_1, X_2, \cdots, X_N)$ est de fonction de répartition goF

Exercice 3 :
Soit X une v.a. intégrable définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que :

1. Si la sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ est indépendante de X, alors $E^{\mathcal{B}}(X) = E(X)$ p.s.
2. Si Y est une v.a. sur Ω, alors il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable telle que : $E(X/Y) = g(Y)$ p.s.

Exercice 4 :

1. Montrer que, si X est une v.a. intégrable, Y une v.a. bornée et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$, alors :
$$E(YE(X/\mathcal{B})) = E(XE(Y/\mathcal{B}))$$
2. On dit que $(X_n)_n \subset L^1$ converge faiblement dans L^1 vers X si, et seulement si, $E(X_nY)$ converge vers $E(XY)$ pour toute v.a. bornée Y.
Montrer que cela implique que $(E(X_n/\mathcal{B}))_n$ converge faiblement dans L^1 vers $E(X/\mathcal{B})$ pour toute sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$.
3. Soit X une v.a.r. de carré intégrable. Montrer que :
$$Var(E(X/\mathcal{B})) \leqslant Var(X)$$
4. Soit X et Y deux v.a. r. telles que $E(X^2) < +\infty$ et $E(Y^2) < +\infty$. On définit
$$Var^{\mathcal{B}}(X) = E^{\mathcal{B}}(X - E^{\mathcal{B}}(X))^2.$$
Montrer que $Var(X) = E(Var^{\mathcal{B}}(X)) + Var(E^{\mathcal{B}}(X))$.

Exercice 5 :

1. Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux sous-tribus de $\mathcal{A}$. On note $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2$ la tribu engendrée par la classe $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. On considère une v.a. r. Y telle que $E(|Y|) < +\infty$, et on suppose que les tribus $\sigma(Y) \vee \mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont indépendantes.
   Montrer que $E(Y/\mathcal{B}) = E(Y/\mathcal{B}_1)$ p.s.
2. Soit (X_i) une suite de v.a.r. indépendantes, de même loi telles que $E(|X_i|) < +\infty$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
   Montrer que pour tout n : $\sigma(S_i; i \geqslant n) = \sigma(S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots)$.
   Déterminer $E(X_1/S_n, S_{n+1}, \cdots)$.

Exercice 6 :
Soit $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ trois sous-tribus de $\mathcal{A}$ telles que $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2$ soit indépendante de $\mathcal{B}_3$.

1. Montrer alors que $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_3$ sont conditionnellement indépendantes connaissant $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$.
2. En déduire que si on a $\mathcal{B}_1 \subset (\mathcal{B}_2 \vee \mathcal{B}_3)$ alors $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$

Exercice 7 :
Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.r. indépendantes identiquement distribuées (i.i.d.), avec $E(X_i) = \mu$ et $Var(X_i) = \sigma^2$. Soit N une v.a. entière, indépendante des X_i avec $E(N) = \nu$ et $Var(N) = w$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer que $E(S_n/N = n) = E(S_n)$.
2. En déduire $E(S_N)$ et $Var(S_N)$.