Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2017/2018
S.M.A.
Semestre 6

Contrôle de Probabilités 2

Durée: 1h30min

Exercice 1 : (5 points)
Soit X une variable aléatoire de loi géométrique sur $\mathbb{N}$, de paramètre $p \in]0,1[$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X=n) = (1-p)p^n.$$

On désigne par Y et Z le quotient et le reste dans la division de X par $a \in \mathbb{N} - \{0,1\}$.

1. Déterminer la loi conjointe du couple aléatoire (Y,Z).
2. Déterminer les lois marginales de Y et de Z. En déduire qu'elles sont indépendantes.

Exercice 2 : (5 points)
On donne deux variables aléatoires X et Y indépendantes suivant toutes les deux des lois de Poisson de paramètres respectifs α et β. On considère la variable aléatoire $Z = X + Y$.

1. Calculer la probabilité $P(Z=n)$; $\quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ?
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(Z=n)$.

Exercice 3 : (10 points)
I.- On considère deux variables aléatoires X et Y continues, indépendantes qui suivent toutes les deux des lois exponentielles de paramètres respectives $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ avec $\lambda \neq \mu$. On donne leurs fonctions de densité de probabilité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geqslant 0; \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \mu e^{-\mu y} & \text{si} \quad y \geqslant 0; \\ 0 & \text{si} \quad y < 0 \end{cases}$$

1. Trouver la fonction de répartition $F(x,y)$ du couple aléatoire (X,Y).
2. Trouver la densité de probabilité de la variable aléatoire somme $S = X + Y$.
3. Calculer la probabilité $P(\frac{X}{Y} < z)$ avec z est un réel non nul. En déduire la densité de la variable aléatoire $Z = \frac{X}{Y}$.

II.- On considère, maintenant, une variable aléatoire T continue telle que $T = e^X$.

1. Déterminer la fonction de densité de probabilité f_T de la variable aléatoire continue T.
2. Déterminer la fonction de répartition F_T de la variable aléatoire continue T.

Bonne chance !