Faculté des Sciences
de Tétouan
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2017/2018
S.M.A – S6

# Corrigés du Contrôle de Probabilités 2



## Exercice 1 :

### 1°) Loi conjointe du couple aléatoire $(Y, Z)$ :

On a : $X = aY + Z$ où $Y \in \mathbb{N}$ et $Z \in \{0, \dots, a-1\}$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, \dots, a-1\}$

$$\begin{aligned} P(Y = n, Z = r) &= P(X = an + r) \\ &= (1-p)p^{an+r} \\ &= (1-p)p^{an}p^r. \end{aligned}$$

### 2°) Lois marginales :

$$\begin{aligned} P(Y = n) &= \sum_{r=0}^{a-1} P(Y = n, Z = r) \\ &= \sum_{r=0}^{a-1} (1-p)p^{an}p^r \\ &= (1-p)p^{an}\sum_{r=0}^{a-1} p^r \\ &= (1-p)p^{an}\frac{1-p^a}{(1-p)} \\ &= (1-p^a)p^{an} \qquad ; \ n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$P(Z=r) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y=n, Z=r)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)\, p^{an} p^{r}$$

$$= (1-p)\, p^{r} \sum_{n=0}^{\infty} p^{an}$$

$$= (1-p)\, p^{r} \frac{1}{1-p^{a}}$$

$$= (1-p^{a})^{-1} (1-p)\, p^{r} \qquad ; \; r \in \{0, \dots, a-1\}$$

3°) Indépendance ?

$$P(Y=n, Z=r) \overset{?}{=} P(Y=n)\, P(Z=r)$$

$$P(Y=n) \cdot P(Z=r) = (1-p^{a})\, p^{an} (1-p^{a})^{-1} (1-p)\, p^{r}$$

$$= (1-p)\, p^{an} p^{r}$$

$$= P(Y=n, Z=r)$$

donc $Y$ et $Z$ sont indépendantes.

## Exercice 2 :

1°) $Z = X + Y$ avec $X \sim \mathcal{P}(\alpha)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\beta)$

$$P(Z=n) = P(X+Y=n) \qquad \text{où } n \in \mathbb{N}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X=k, Y=n-k)$$

or $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors

$$P(Z=n)=\sum_{k=0}^{n} P(X=k)\cdot P(Y=n-k) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} e^{-\alpha}\frac{\alpha^k}{k!}\cdot e^{-\beta}\frac{\beta^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= e^{-(\alpha+\beta)} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cdot\frac{1}{n!}\,\alpha^k \beta^{n-k}$$

$$= \frac{e^{-(\alpha+\beta)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, \alpha^k \beta^{n-k}$$

$$P(Z=n) = e^{-(\alpha+\beta)}\frac{(\alpha+\beta)^n}{n!} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

donc $Z \sim \mathcal{P}(\alpha+\beta)$.

2°) $$P(X=m/Z=n) = \frac{P(X=m,\, Z=n)}{P(Z=n)}$$

$$= \frac{P(X=m,\, X+Y=n)}{P(Z=n)}$$

$$= \frac{P(X=m,\, Y=n-m)}{P(Z=n)}$$

$$= \frac{P(X=m)\cdot P(Y=n-m)}{P(Z=n)} \quad \text{(car } X \text{ et } Y \text{ indép.)}$$

$$= \frac{e^{-\alpha}\frac{\alpha^m}{m!}\cdot e^{-\beta}\frac{\beta^{n-m}}{(n-m)!}}{e^{-(\alpha+\beta)}\frac{(\alpha+\beta)^n}{n!}}$$

$$= C_n^m \left( \frac{\alpha^m \beta^{n-m}}{(\alpha+\beta)^n} \right) \cdot \frac{e^{-(\alpha+\beta)}}{e^{-(\alpha+\beta)}}$$

$$= C_n^m \left( \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)^m \left( 1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)^{n-m} \quad ; \; m = 0, 1, 2, \dots, n$$

C'est la loi binomiale de paramètres $n$ et $p = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$

## Exercice 3:

I.- 1°) On a :

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\, du\, dv = \int_0^x \int_0^y \lambda\mu\, e^{-\lambda u - \mu v}\, du\, dv$$

$$= \left(1 - e^{-\lambda x}\right)\left(1 - e^{-\mu y}\right)$$

et
$$F(x,y) = \begin{cases} (1 - e^{-\lambda x})(1 - e^{-\mu y}) & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2°) La densité de $S$ s'écrit :

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, f_Y(s-x)\, dx$$

$$= \int_{\substack{x \geq 0 \\ s-x \geq 0}} \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu(s-x)}\, dx$$

si $s \geq 0$ , on a: $f_S(s) = \int_0^s \lambda\mu e^{-\mu s} e^{-(\lambda-\mu)x} dx$

$$= \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}\left(e^{-\mu s} - e^{-\lambda s}\right).$$

$$\boxed{\underline{\text{Pour}}\ \underline{\lambda \neq \mu}\ ;\ f_S(s) = \begin{cases} \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}\left(e^{-\mu s} - e^{-\lambda s}\right) & \text{si } s \geq 0 \\ 0 & \text{si } s < 0 \end{cases}}$$

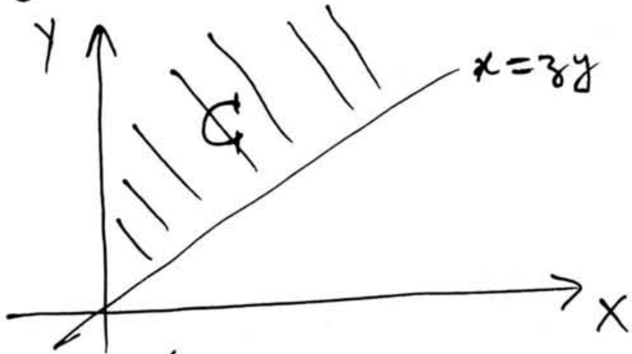
Pour $\lambda = \mu$ ; $f_S(s) = \int_0^s \lambda\lambda e^{-\lambda s} dx = \lambda^2 s e^{-\lambda s}$ si $s \geq 0$

et on a donc

$$f_S(s) = \begin{cases} \lambda^2 s e^{-\lambda s} & \text{si } s \geq 0 \\ 0 & \text{si } s < 0 \end{cases}$$

3°) On calcule $P\left(\frac{X}{Y} < z\right) = \iint_G f(x,y)\, dx\, dy$

où $G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \frac{x}{y} < z\right\}$




$$P\left(\frac{X}{Y} < z\right) = \int_0^\infty \lambda \left(\int_{\frac{x}{z}}^\infty \mu e^{-\mu y} dy\right) e^{-\lambda x} dx$$

$$P\left(\frac{X}{Y} < z\right) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\left(\lambda + \frac{\mu}{z}\right)x} dx$$

$$\boxed{P\left(\frac{X}{Y} < z\right) = \frac{\lambda z}{\lambda z + \mu}}$$

Déduction de la densité de $Z = \frac{X}{Y}$ ?

On a : $F_Z(z) = P(Z \leq z)$

$$= P\left(\frac{X}{Y} \leq z\right)$$

$$= \iint_G f(x,y)\, dy\, dx \quad \text{où } z \text{ est fixé.}$$

Comme $P\left(\frac{X}{Y} \leq z\right) = \frac{\lambda z}{\lambda z + \mu} = F_Z(z)$, la densité $f_Z(z)$ de $Z$

est donnée par $\boxed{f_Z(z) = F_Z'(z) = \frac{\lambda(\lambda z + \mu) - \lambda^2 z}{(\lambda z + \mu)^2} = \frac{\lambda \mu}{(\lambda z + \mu)^2} \text{ pour } z \in ]0, +\infty[}$

II.- $T = e^X$.

1°) La transformation considérée ici est l'exponentielle qui est une fonction strictement croissante, alors on peut appliquer la formule $f_T(t) = f_X(\log t) \left|\frac{1}{t}\right|$

donc $f_T(t) = \lambda \frac{e^{-\lambda \log t}}{t}$ pour $t \geq 1$

d'où $\boxed{f_T(t) = \frac{\lambda}{t^{\lambda+1}} \text{ pour } t \geq 1 \text{ et } f_T(t) = 0 \text{ si } t < 1}$

2°) On a :

$$F_T(t) = P(T \leq t)$$

$$= \int_{-\infty}^{t} f_T(u)\, du$$

$$= \int_{1}^{t} \frac{\lambda\, du}{u^{\lambda+1}} = 1 - t^{-\lambda} \quad \text{pour } t \geq 1$$

et $F_T(t) = 0$ si $t < 1$

d'où

$$F_T(t) = \begin{cases} 1 - t^{-\lambda} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } t < 1 \end{cases}$$