Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2017/2018
S.M.A.
Semestre 6

Rattrapage de Probabilités 2
Durée: 1h30min

Exercice 1 : (6 points)
Soit X une variable aléatoire discrète qui suit une loi binomiale $B(n,p)$ de paramètres n et p.

1. Montrer que la variable aléatoire $Y = n - X$ suit une loi binomiale $B(n, 1-p)$ de paramètres n et $1-p$.
2. Montrer que $P(X = k) = \frac{(n-k+1)p}{k(1-p)} P(X = k-1)$ et recalculer $P(X = k)$ par récurrence.
3. Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires discrètes, indépendantes qui suivent des lois binomiales $B(n_1, p)$ et $B(n_2, p)$ respectivement.
   Montrer que leur somme $Z = X_1 + X_2$ suit une loi binomiale $B(n_1 + n_2, p)$.

Exercice 2 : (4 points)
Soient p, q, r trois réels strictement positifs tels que $p+q+r = 1$. On considère, pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable aléatoire $Y_n = (U_n, V_n)$ à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, de loi trinomiale déterminée par : pour tout $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 \leqslant k + l \leqslant n$,

$$P(Y_n = (k,l)) = \frac{n!}{k!l![n-(k+l)]!} p^k q^l r^{n-(k+l)}.$$

On pose $Y_0 = (0,0)$ (avec la convention $0! = 1$, on remarquera que Y_0 satisfait encore à l'égalité ci-dessus).

1. Démontrer que les variables aléatoires à valeurs entières U_n et V_n sont de loi binomiale. Déterminer leurs paramètres.
2. Les variables aléatoires U_n et V_n sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 : (10 points)
Soit X une variable aléatoire réelle continue, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, et suivant une loi normale centrée réduite $N(0,1)$. On considère $Y = X^2$.

1. Montrer que Y est bien une variable aléatoire.
2. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.
3. En déduire la fonction de densité f_Y de Y.
4. Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes les deux une loi normale centrée réduite $N(0,1)$, déterminer la fonction de densité de la variable aléatoire $Z = X_1^2 + X_2^2$. [N.B. Les variables aléatoires X_1^2 et X_2^2 seront aussi indépendantes].
5. En déduire la fonction de densité de la variable aléatoire $T = \sqrt{Z}$.

Bonne chance !

Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences
Tétouan
Département de Mathématiques

Année : 2017 - 2018
S.M.A. S6

Corrigés du rattrapage de Probabilités 2

Exercice 1 :

$X \sim B(n, p)$

1°) $P(Y = k) = P(X = n-k) = C_n^{n-k} \, p^{n-k} (1-p)^k$

Comme $C_n^{n-k} = C_n^k$, on obtient

$$P(Y=k) = C_n^k (1-p)^k p^{n-k} = C_n^k (1-p)^k (1-(1-p))^{n-k}$$

donc $Y \sim B(n, 1-p)$

2°) On a : $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

et $P(X=k-1) = C_n^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}$

donc $$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} = \frac{C_n^k \, p}{C_n^{k-1} (1-p)} = \frac{(k-1)!\,(n-k+1)!}{k!\,(n-k)!} \frac{p}{(1-p)}$$

$$= \frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}$$, d'où l'égalité.

On a, donc $$P(X=k) = P(X=k-1) \frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}$$

$$= P(X=k-2) \frac{(n-k+2)(n-k+1)p^2}{(k-1)k(1-p)^2}$$

$$= \cdots\cdots$$

$$= P(X=0) \frac{n \ldots (n-k+2)(n-k+1)p^k}{1 \times \cdots \times (k-1)k(1-p)^k}$$

et comme $P(X=0) = (1-p)^n$ et $n \ldots (n-k+2)(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

on retrouve la formule.

3°) X_1 et X_2 v.a. indépendantes telles que

$$X_1 \sim B(n_1, p) \quad \text{et} \quad X_2 \sim B(n_2, p)$$

$$P(X_1 + X_2 = k) = \sum_{i+j=k} P(X_1 = i, X_2 = j)$$

$$= \sum_{i+j=k} P(X_1 = i) . P(X_2 = j)$$

$$= \sum_{i+j=k=0}^{n_1+n_2} C_{n_1}^{i} p^{i} (1-p)^{n_1-i} C_{n_2}^{j} p^{j} (1-p)^{n_2-j}$$

$$= \sum_{i+j=k=0}^{n_1+n_2} C_{n_1}^{i} C_{n_2}^{j} p^{i+j} (1-p)^{n_1+n_2-(i+j)}$$

or $\displaystyle\sum_{i+j=k=0}^{n_1+n_2} C_{n_1}^{i} C_{n_2}^{j} = C_{n_1+n_2}^{i+j} = C_{n_1+n_2}^{k}$

d'où $P(X_1 + X_2 = k) = C_{n_1+n_2}^{k} p^{k} (1-p)^{n_1+n_2-k}$

et $X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, p)$

Exercice 2:

1°) La famille $(V_n = \ell)$, $\ell \in \mathbb{N}$, est un système complet d'évènements

Donc, on a $\displaystyle P(U_n = k) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} P(U_n = k, V_n = \ell)$

soit $\displaystyle P(U_n = k) = \sum_{\ell=0}^{n-k} \frac{n!}{k!\,\ell!\,[n-(k+\ell)]!} p^{k} q^{\ell} r^{n-(k+\ell)}$

ou encore $\displaystyle P(U_n = k) = \frac{p^k\, n!}{k!\,(n-k)!} \sum_{\ell=0}^{n-k} C_{n-k}^{\ell} q^{\ell} r^{(n-k)-\ell}$

$$= C_n^k p^k (q+r)^{n-k}$$

puisque $q + r = 1 - p$, il vient

$$P(U_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

C'est-à-dire la loi de U_n est la loi binomiale $B(n,p)$.

De même, la loi de V_n est la loi binomiale $B(n,q)$.

2°) On a :

$$P(U_n = 0, V_n = 0) = r^n \neq (1-p)^n (1-q)^n = P(U_n=0).P(V_n=0),$$

ce qui démontre que les variables aléatoires U_n et V_n ne sont pas indépendantes.

Exercice 3 :

1°) on a : $\{Y \leqslant x\} = \{X^2 \leqslant x\} = \{-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}\}$

$$= \{X \leqslant \sqrt{x}\} \cap \{X \geqslant -\sqrt{x}\}$$

$$= \{X \leqslant \sqrt{x}\} \cap \{X < -\sqrt{x}\}^C \in \mathcal{B}$$

donc $Y = X^2$ est bien une variable aléatoire

2°) $X \sim N(0,1)$; donc $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$; $x \in \mathbb{R}$

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(X^2 \leqslant y)$$

d'où, deux cas à distinguer :

1^er^ Cas : si $y \leqslant 0$; $F_Y(y) = P(X^2 \leqslant y) = 0$, car $X^2 \geqslant 0$

2^eme^ Cas : si $y > 0$; $F_Y(y) = P(X^2 \leqslant y)$

$$= P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

f_X étant une fonction paire,

Posons $x^2 = u \Rightarrow 2x\,dx = du$

$\Rightarrow dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$

On a $F_Y(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y \frac{1}{2} e^{-\frac{u}{2}} . u^{-\frac{1}{2}} du$

Or, on sait que $\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, on peut donc écrire :

$$F_Y(y) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^y u^{\frac{1}{2}-1} . e^{-\frac{u}{2}} . du$$

On rappelle que la fonction gamma ou seconde fonction d'Euler est $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{\alpha-1} dt$

F_Y est de la forme

$$F_Y(y) = \frac{1}{\beta^\alpha\,\Gamma(\alpha)} \int_0^y u^{\alpha-1}\, e^{-\frac{u}{\beta}} du$$

ce qui est la forme de répartition d'une v.a. suivant une loi gamma de paramètres $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = 2$.

Donc $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^y u^{\frac{1}{2}-1} . e^{-\frac{u}{2}} du & \text{si } y > 0 \end{cases}$

Ou encore $Y \sim G(\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 2)$

Dans ce cas particulier ($\beta = 2$ et $\alpha = \frac{m}{2}$ avec $m \neq 2n$)

On dit que Y suit une loi de Khi-deux (χ_1^2) à un degré de liberté.

3°) On en déduit la fonction de densité de y.

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{y}{2}} & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

car $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Effectivement, Y suit la loi du Khi-deux à 1 degré de liberté.

4°) Les variables aléatoires X_1^2 et X_2^2 sont indépendantes et leur somme Z admet donc une fonction de densité f_Z produit de convolution des densités de X_1^2 et X_2^2. Il résulte de la question précédente que, pour tout $z \leq 0$; on a $f_Z(z) = 0$ et pour tout $z > 0$, on a :

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\, f_X(z-y)\, dy$$

$$= \int_{\substack{y \geq 0 \\ z-y \geq 0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (z-y)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-(z-y)}{2}} \cdot dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z}{2}} \int_0^z \frac{dy}{\sqrt{y(z-y)}}$$

Soit, en faisant le changement de variables $y = zu$

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z}{2}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}\, du$$

On reconnaît la forme analytique de la densité d'une loi exponentielle $\exp\left(\frac{1}{2}\right)$, ce qui donne d'ailleurs, sans calcul, le résultat élémentaire :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}\, du = \pi$$

on a, alors
$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{z}{2}\right) & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarquera que cette loi est aussi la loi du Khi-deux à 2 degrés de liberté.

5°) Soit F_T la fonction de répartition de T; pour tout $t \geqslant 0$, on a $F_T(t) = 0$, et pour tout $t > 0$, on a :

$$F_T(t) = P(T \leqslant t) = P(Z \leqslant t^2) = \int_0^{t^2} \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{z}{2}\right) dz$$

La fonction F_T est donc dérivable, sauf peut-être en 0 ; la variable aléatoire T admet une fonction de densité f_T, dérivée de F_T, donnée par :

$$f_T(t) = \begin{cases} t\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$