Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2017 – 2018
Masters
MAP et MAF

Contrôle de Calcul Stochastique

Durée: 2 heures

Exercice 1 :

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un esapce probabilisé. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux sous-tribus de $\mathcal{A}$. On note $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2$ la tribu engendrée par la classe $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. On considère une v.a. r. Y telle que $E(|Y|) < +\infty$, et on suppose que les tribus $\sigma(Y) \vee \mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont indépendantes.
   Montrer que $E(Y/\mathcal{B}) = E(Y/\mathcal{B}_1)$ (p.s.).
2. Soit (X_i) une suite de v.a.r. indépendantes, de même loi μ, telles que $E(|X_i|) < +\infty$, on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $\mu^{(n)} = \mu * \mu * \cdots * \mu$ (n-fois produit de convolution de la mesure (loi) μ.
   Montrer que $\forall n; \forall i \leqslant n$ et $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (tribu des boréliens de $\mathbb{R}$)
   $$\int_{(S_n \in B)} X_i dP = \int x\mu^{(n-1)}(B - x)\mu(dx)$$
   et en déduire que $E(X_n/S_n) = E(X_i/S_n)$ (p.s.).
3. Montrer que pour tout $n : \sigma(S_i; i \geqslant n) = \sigma(S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots)$.
   Déterminer $E(X_1/S_n, S_{n+1}, \cdots)$.

Exercice 2 :

1. On désigne par $U_1, \cdots, U_n, \cdots$ une suite infinie de variables aléatoires mutuellement indépendantes, positives, et de même loi définie par la densité $\lambda e^{-\lambda u}$; $\quad \lambda > 0$. Vérifier par récurrence (ou démontrer par tout autre moyen), que la loi de la variable aléatoire $T_n = \sum_{k=1}^n U_k$ est définie par une densité égale à $K_n e^{-\lambda u} u^{n-1}$. Quelle est la valeur du coefficient K_n ?
   On interprète $T_1, \cdots, T_n, \cdots$ comme les temps successifs de réalisation d'un évènement E au cours d'un processus aléatoire.
2. On désigne par $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ le processus de Poisson sur $\mathbb{R}^+$ où $K(0) = 0$ et où, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $K(t)$ est la variable aléatoire égale au nombre de T de la suite infinie $T_1, \cdots, T_n, \cdots$ inférieurs ou égaux au nombre t fixe donné ($t \geqslant 0$).
   Au moyen de la probabilité de $\{T_{k+1} > t\}$, conditionnée par $\{T_k = u\}$ ($u \leqslant t$) calculer $P\{K(t) = k\}$ et montrer que $K(t)$ obéit à la loi de Poisson de paramètre λt.
3. De la même façon, en considérant l'évènement $\{T_{k+1} > t + \theta / T_k = u\}$, et désignant par T le temps auquel survient le premier évènement postérieur à t ($T > t$), montrer que la probabilité $P\{T > t + \theta\}$ ne dépend pas du rang k du dernier évènement (survenu au temps $T_k \leqslant t$), et que la loi de $T - t$ est celle des U.
4. Montrer que $P\{T_n \leqslant \alpha\} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow 0}$ quel que soit α donnée ;
   en déduire que :
   (a) $P\{T_n \leqslant \alpha, \text{ pour tout } n\} = 0$.
   (b) avec probabilité 1, la suite T_n augmente indéfiniment.
5. Quelles convergences peut-on obtenir pour la suite des variables $\frac{T_n - A_n}{B_n}$, c'est-à-dire pour les variables T_n convenablement normées et au besion centrées ?

Bonne chance !

Faculté des Sciences
Tétouan
Département de Mathématiques

2017 – 2018
Masters MAF & MAP

Corrigés de Contrôle de Calcul Stochastique

Ex. 1 :

1°) On a : $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2$; $E(|Y|) < +\infty$

$\sigma(Y) \vee \mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont indépendantes.

Montrons que $E(Y/\mathcal{B}) = E(Y/\mathcal{B}_1)$ (p.s.)

Pour cela, il faut montrer qu'elles ont même intégrales sur B ; c'est-à-dire $\int_B E(Y/\mathcal{B})\,dP = \int_B E(Y/\mathcal{B}_1)\,dP$, $\forall B \in \mathcal{B}$

Méthode suivie au cours ; il suffit de vérifier l'égalité sur $B_1 \cap B_2$ où $B_1 \in \mathcal{B}_1$ et $B_2 \in \mathcal{B}_2$; En effet ;

$$\int_{B_1 \cap B_2} E(Y/\mathcal{B})\,dP = \int_{B_1 \cap B_2} Y\,dP = E\left(Y \cdot \mathbb{1}_{B_1} \cdot \mathbb{1}_{B_2}\right)$$

$$= E\left(\mathbb{1}_{B_2}\right) \cdot E\left(Y \cdot \mathbb{1}_{B_1}\right)$$

$$= E\left(\mathbb{1}_{B_2}\right) \cdot E\left(E\left(Y \cdot \mathbb{1}_{B_1} / \mathcal{B}_1\right)\right)$$

$$= E\left(\mathbb{1}_{B_2}\right) \cdot E\left(\mathbb{1}_{B_1} \cdot E\left(Y/\mathcal{B}_1\right)\right)$$

$$= E\left(\mathbb{1}_{B_2} \cdot \mathbb{1}_{B_1} \cdot E\left(Y/\mathcal{B}_1\right)\right) \quad \left(\text{l'indép. de } \sigma(Y) \vee \mathcal{B}_1 \text{ et } \mathcal{B}_2\right)$$

$$= \int_{B_1 \cap B_2} E\left(Y/\mathcal{B}_1\right)\,dP.$$

On en déduit que : si les v.a. X_1 et X_2 sont telles que : (Y, X_1) et X_2 sont indépendantes, alors $E(Y/(X_1, X_2)) = E(Y/X_1)$

2°) Posons $S_{(n)}^{(i)} = S_n - X_i$

et $X_n^{(i)} = x_1 + \cdots + x_n - x_i$

alors
$$\int_{(S_n \in B)} X_i \, dP = \int_{(S_n^{(i)} + X_i \in B)} X_i \, dP$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} x_i \, \mathbb{1}_{\{x_n^{(i)} \in B - x_i\}} \, dP_{(X_i, S_n^{(i)})}(x_i, x_n^{(i)})$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} x_i \, \mathbb{1}_{\{x_n^{(i)} \in B - x_i\}} \, \mu(dx_i) . \mu^{(n-1)}(dx_n^i)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} x_i \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\mu^{(n-1)}(B - x_i) \right) \mu(dx_i)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} x_i \, \mu^{(n-1)}(B - x_i) \, \mu(dx_i)$$
$\boxtimes$

Déduction:

On a alors $\displaystyle\int_{(S_n \in B)} X_i \, dP = \int_{(S_n \in B)} X_n \, dP$; $\forall \, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

$$\Longrightarrow \quad E(X_n / S_n) = E(X_i / S_n) \quad (p.s.)$$

3°) Posons $\mathcal{A} = \sigma(S_i \; ; \; i \geq n)$ et $\mathcal{A}' = \sigma(S_n, X_{n+1}, \ldots)$

+ S_n est $\mathcal{A}'$-mesurable

+ $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ est $\mathcal{A}'$-mesurable ($\Longrightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$)

+ $S_{n+k} = S_n + X_{n+1} + \cdots + X_{n+k}$ est $\mathcal{A}'$-mesurable de même : $+ S_n$ est $\mathcal{A}$-mesurable

$+ X_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ est $\mathcal{A}$-mesurable ($\Rightarrow \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$)

$+ X_{n+k} = S_{n+k} - S_{n+k-1}$ est $\mathcal{A}$-mesurable

d'où l'égalité.

Montrons que $E(X_1 / S_n, S_{n+1}, \dots) \overset{?}{=} \frac{S_n}{n}$ (p.s.) ?

En effet ; on a $E(X_1 / S_n, S_{n+1}, \dots) = E(X_1 / S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$

or $\sigma(S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots) = \sigma(S_n) \vee \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$

posons $\sigma(S_n) = \mathcal{B}_1$ et $\sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots) = \mathcal{B}_2$

il suffit de voir que $\sigma(X_1) \vee \sigma(S_n)$ et $\mathcal{B}_2$ sont indépendantes.

en effet ; X_n est indépendante de $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$

et S_n est indépendante de X_{n+k} ; $\forall k \geq 1$

en effet $(X_1, \dots, X_n)$ est indépendante de X_{n+k}

car $P_{(X_1, \dots, X_n, X_{n+k})} = P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n} \otimes P_{X_{n+k}}$

$= P_{(X_1, \dots, X_n)} \otimes P_{X_{n+k}}$

par suite, si on pose $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$ qui est borélienne

alors $f(X_1, \dots, X_n) = S_n$ et X_{n+k} sont indépendantes.

d'où, on applique 1°), on aura :

$$E(X_1 / S_n, S_{n+1}, \dots) = E(X_1 / S_n) \quad \text{(p.s.)}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i / S_n) \quad \text{(p.s.)}$$

$$= \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i / S_n\right) \quad \text{(p.s.)}$$

$$\overset{\text{(p.s.)}}{=} \frac{1}{n} E(S_n / S_n) = \frac{S_n}{n} \quad \text{(p.s.)}$$

<u>Ex. 2 :</u>

1°) En utilisant la formule pour la densité de la somme :

$$f_{T_2}(v) = \int_0^v \lambda e^{-\lambda u} \lambda e^{-\lambda(v-u)} du$$

L'intégrale est à prendre entre 0 et v puisque la densité est nulle pour les valeurs négatives de l'argument. On obtient :

$$f_{T_2}(v) = \lambda^2 e^{-\lambda v} \int_0^v du = \lambda^2 . e^{-\lambda v} . v .$$

Raisonnons par récurrence et supposons que

$$f_{T_{n-1}}(u) = K_{n-1} e^{-\lambda u} u^{n-2} ;$$

alors $$f_{T_n}(u) = \int_0^v K_{n-1} e^{-\lambda u} u^{n-2} \lambda e^{-\lambda(v-u)} du$$

$$= \lambda K_{n-1} e^{-\lambda v} \int_0^v u^{n-2} du = \frac{\lambda K_{n-1}}{n-1} e^{-\lambda} v^{n-1}$$

L'hypothèse de récurrence est vérifiée avec $K_n = \frac{\lambda K_{n-1}}{n-1}$

soit $K_n = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}$. On trouve

$$f_{T_n}(u) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda u} u^{n-1} \quad , \text{pour } u \geq 0$$

d'où

$$f_{T_n}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda u} u^{n-1} & \text{si } u \geq 0 \end{cases}$$

2°) D'après la définition même de K(t)

$$P(K(t)=k) = P(T_{k+1} > t\,,\ T_k \leq t)$$

$$= P(T_k \leq t) \cdot P(T_{k+1} > t / T_k \leq t)$$

Soit $f_k(u) = \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda u} u^{k-1}$ la densité de T_k.

On a alors $\quad P(K(t)=k) = \int_0^t f_k(u)\, P(T_{k+1} > t / T_k = u)\, du.$

Or, il est clair que

$$P(T_{k+1} > t / T_k = u) = P(U_{k+1} > t-u) = e^{-\lambda(t-u)}.$$

D'où $\quad P(K(t)=k) = \int_0^t \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda u} u^{k-1} e^{-\lambda(t-u)} du$

$$= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

K(t) suit, donc, une loi de Poisson de paramètre (λt).

3°) On a $\quad P(T > t+\theta) = \sum_k P(T_{k+1} > t+\theta\,,\ T_k < t)$

et $\quad P(T_{k+1} > t+\theta\,,\ T_k < t) = \int_0^t f_k(u) \cdot P(U_{k+1} > t+\theta-u)\, du$

$$= e^{-(\lambda+\theta)} \frac{(\lambda t)^k}{k!},$$

d'où $\quad P(T > t+\theta) = e^{-\lambda\theta},$

$$P(T-t < \theta) = 1 - e^{-\lambda\theta}$$

On retrouve bien la loi de U.

D'autre part

$$P\left(T > t+\theta \,/\, K(t)=k\right) = \frac{P(T>t+\theta \,,\, K(t)=k)}{P(K(t)=k)}$$

Or $P\left(T > t+\theta \,,\, K(t)=k\right) = P\left(T>t+\theta \,,\, T_k < t\right)$

D'où $$P\left(T>t+\theta \,/\, K(t)=k\right) = \frac{e^{-\lambda\theta}\,\frac{(\lambda t)^k}{k!}\,e^{-\lambda t}}{\frac{(\lambda t)^k}{k!}\,e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda\theta}$$

Ce qui est indépendant de k.

4°) $$P\left(T_n \leq \alpha\right) = \int_0^{\alpha} \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\, e^{-\lambda u}\, u^{n-1}\, du$$

$$= \frac{\lambda}{(n-1)!} \int_0^{\alpha} e^{-\lambda u}\, u^{n-1}\, du$$

$$\leq \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{\alpha} u^{n-1}\, du = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\,\frac{\alpha^n}{n} = \frac{(\lambda\alpha)^n}{n!}$$

Donc $P\left(T_n \leq \alpha\right) \longrightarrow 0$

(a) On a : $\sum_n P\left(T_n \leq \alpha\right) \leq \sum_n \frac{(\lambda\alpha)^n}{n!} < \infty$,

et d'après le théorème de Borel-Cantelli

$$P\left(T_n \leq \alpha \text{ pour tout } n\right) = 0$$

(b) Puisque $P\left(T_n \leq \alpha \text{ pour tout } n\right) = 0$ il s'en suit que

$P\left(T_n > \alpha \text{ pour un } n\right) = 1$ pour tout α.

Donc $P\left(\liminf T_n = \infty\right) = 1$

et puisque la suite T_n est croissante

$$P\left(\lim T_n = \infty\right) = 1$$

5°) On obtient facilement $E(U_k) = \frac{1}{\lambda}$ et $Var(U_k) = \frac{1}{\lambda^2}$.

les variables U_k étant indépendantes, on a

$$\frac{1}{n}\left(T_n - \frac{n}{\lambda}\right) \longrightarrow 0 \quad (p.s.)$$

et $$\frac{T_n - \frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}} \xrightarrow{L} N(0,1)$$