Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2017 − 2018
Masters
MAP et MAF

Rattrapage de Calcul Stochastique

Durée: 2 heures

Exercice 1 :

1. Soient $(N_t)_{t\geqslant 0}$ et $(M_t)_{t\geqslant 0}$ deux processus de Poisson indépendants de paramètres respectifs λt et μt. Montrer que $(N_t + M_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus de Poisson de paramètre $(\lambda+\mu)t$.
2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p et $(N_t)_{t\geqslant 0}$ un processus de Poisson de paramètre λt. On définit les processus $(Q_t)_{t\geqslant 0}$ et $(F_t)_{t\geqslant 0}$ par : $Q_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$et $F_t = \sum_{i=1}^{N_t}(1-X_i)$. Montrer que $(Q_t)_{t\geqslant 0}$ et $(F_t)_{t\geqslant 0}$ sont deux processus de Poisson de paramètres respectifs $pt\lambda$ et $(1-p)t\lambda$.

Exercice 2 :
Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des variables aléatoires, indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectives $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

1. Quelle est la loi suivie par $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$?
2. Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant que $X_1 + X_2 = s$.
3. Déterminer la loi conditionnelle de $(X_1, X_2, \cdots, X_{n-1})$ sachant que $X_1+X_2+\cdots+X_n = s$.
4. Calculer $E(X_1/X_1 + X_2)$.

Exercice 3 :
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un esapce de probabilité et $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous σ-algèbres de $\mathcal{A}$ telles que pour tout n, $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$.
Une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ est appelée un temps d'arrêt si $\{T \leqslant n\} \in \mathcal{A}_n$ quel que soit n.

1. Montrer que T est un temps d'arrêt si, et seulement si, $\{T = n\} \in \mathcal{A}_n$ pour tout n. Les constantes entières sont des temps d'arrêt.
2. On appelle $\mathcal{A}_T$ la classe des ensembles $A \in \mathcal{A}$ tels que $A \cap \{T \leqslant n\} \in \mathcal{A}_n$ quel que soit n. Montrer que $\mathcal{A}_T$ est une σ-algèbre, et que T est mesurable par rapport à la σ-algèbre $\mathcal{A}_T$. Si $T = k$(une constante entière), à quoi est égale $\mathcal{A}_T$?
3. Si S et T sont deux temps d'arrêt, montrer que $\inf(S,T)$ et $\sup(S,T)$ sont des temps d'arrêt. Montrer que si $A \in \mathcal{A}_S$, l'ensemble $A\cap\{S \leqslant T\}$ est dans $\mathcal{A}_T$. Si $S \leqslant T$, montrer que $\mathcal{A}_S \subset \mathcal{A}_T$.
4. Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles telles que, pour tout n, X_n soit $\mathcal{A}_n$-mesurable. Si T est un temps d'arrêt fini, montrer que l'application $\omega \mapsto X_{T(\omega)}(\omega)$ définit une variable aléatoire $\mathcal{A}_T$-mesurable.
5. Sous les mêmes hypothèses, si B est un borélien de la droite réelle, montrer que la fonction définie par :

$$T(\omega) = \begin{cases} \inf\{n : X_n(\omega) \in B\} & \text{s'il existe de tels entiers n,} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

   est un temps d'arrêt.