Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année: 2018-2019
S.M.A.
Semestre 6

Probabilités 2

Prof. Mohamed El Merouani
https://elmerouani.jimdo.com/
e-mail: m_merouani@yahoo.fr

1

Programme

- Mesure de Probabilité (Kolmogorov 1903-1987)
- Variables aléatoires-Vecteurs aléatoires
- Indépendance
- Convergences stochastiques
- Lois des grands nombres
- Le théorème central limite
- Espérance conditionnelle
- Processus Stochastiques

2

Pré requis

- Cours Probabilités-Statistiques de S3
- Cours d'Intégration de S5

Bibliographie

- A. Monfort: «Cours de Probabilités », Economica, 3e édition, 1996.
- D. Foata, A. Fuchs:«Calcul des probabilités, cours, exercices et problèmes corrigés », 2e édition, Dunod, 1998.
- M. Brancovan, T. Jeulin: «Probabilités », ellipses, 2006.
- M. Métivier:«Notions fondamentales de la théorie des probabilités », Dunod Université, 1979.
- J-Y. Ouvrard: «Probabilités 1 & 2 », Cassini, 2007.
- Ph. Barbe, M. Lediux:« Probabilité », Belin, 1998.

3

Chapitre 1: Mesure de Probabilité

4

Tribu ou σ-algèbre

Définition:

Soit Ω un ensemble non vide (l'ensemble de tous les résultats possibles d'une épreuve aléatoire). Ω est appelé espace fondamental.

Une famille $\mathcal{A}$ de parties de Ω est une tribu (ou σ-algèbre), si:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall A \in \mathcal{A}$; $A^c \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall (A_n)_{n \in IN}$ suite d'éléments de A; $\bigcup_{n \in IN} A_n \in \mathcal{A}$

5

Tribu

- Le couple (Ω, $\mathcal{A}$) s'appelle un espace mesurable (ou espace probabilisable lorsque Ω est l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire).
- Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés ensembles mesurables (ou évènements lorsqu'il s'agit d'un espace probabilisable)

6

Mesure de Probabilité

Définition :

Soit (Ω, A) un espace probabilisable (mesurable).

On appelle probabilité (ou mesure de probabilité) toute mesure P sur A telle que P(Ω)=1.

On dit que (Ω, A, P) est un espace probabilisé.

7

Donc une probabilité P est:

- une mesure sur A:

  C'est une fonction d'ensemble positive, non identiquement égale à +∞, σ-additive sur A:

  pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de A deux à deux disjoints, dont la réunion $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in A$, on a

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- telle que P(Ω)=1

8

Remarques:

- En particulier, si μ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$ avec $0<\mu(\Omega)<\infty$, on voit que $P = \dfrac{\mu}{\mu(\Omega)}$ est une probabilité.
- Si P est une probabilité, observons que P est à valeurs dans [0,1] puisque pour tout ensemble mesurable A,

$$P(A) \leq P(\Omega) = 1$$

- De plus, $P(\emptyset)=0$

9

Evènement:

Définition:

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

Un ensemble $A \in \mathcal{A}$ est appelé un évènement.

Un évènement A a lieu P-presque surement (P-p.s.) s'il a lieu P-p.p. (i.e. si $P(A)=1$).

10

Propriétés de la Probabilité:

- En reprenant les propriétés des mesures, on voit que si P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et si $A, B, A_n,\ n \in IN$, sont mesurables, alors:

i. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

ii. $P(A^c)=1-P(A)$

iii. $P(A \cup B)=P(A)+P(B) - P(A \cap B)$

iv. Si $(A_n)_n$ est une suite croissante, ou décroissante, d'événements alors

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

11

Propriétés de la Probabilité:

v. $$P\left(\bigcup_{n\in IN} A_n\right) \leq \sum_{n\in IN} P(A_n)$$

vi. Pour tout $n \in IN$, on a:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Inégalité de Bonferoni

12

Propriétés de la Probabilité:

La dém. En T.D. le jeudi prochain de 16h à 18h salle 18.

13

Chapitre 2: Variables aléatoires- Vecteurs aléatoires

14

Variable aléatoire:

Définition:

- Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(\Omega', \mathcal{A}')$ deux espaces probabilisables.
- L'application X de Ω dans Ω' est dite variable aléatoire (v.a.) lorsque pour tout $B \in \mathcal{A}'$, on a:

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

- Une v.a. X est, donc, une application mesurable pour les tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$.

15

Tribu engendrée par une v.a.

Définition:

- La tribu engendrée par une v.a. X et notée $\sigma(X)$ est la plus petite tribu par rapport à laquelle X est mesurable:

$$\sigma(X)=\{A \in \mathcal{A} / \exists B \in \mathcal{A}' ; A=X^{-1}(B)=\{X \in B\}\}$$

Tribu borelienne:

Définition:

- La tribu borélienne, notée $\mathcal{B}(IR)$, est la tribu engendrée par les ouverts de IR (i.e. c'est la plus petite tribu qui contient les ouverts de IR).
- On peut écrire $\mathcal{B}(IR)=\sigma$(ouverts de IR)
  $= \sigma$(fermés de IR)
- $\mathcal{B}(IR)$ est aussi engendrée par les intervalles ouverts de IR de la forme $]a,b[$; $a,b \in IR$.

$$\mathcal{B}(IR)=\sigma(]a,b[;\ a,b \in IR)$$

Variable aléatoire réelles ou vectorielles:

- Pour l'essentiel, on se contentera de variables à valeurs dans $(IR, \mathcal{B}(IR))$ ou $(IR^d, \mathcal{B}(IR^d))$. Elles seront appelées variables aléatoires réelles ou vectorielles.
- Si X et Y sont deux v.a. sur (Ω, A, P) avec $X=Y$ P-p.p., on écrit aussi bien $X=Y$ P-p.s. ou $X=Y$ p.s. s'il n'y a pas d'ambiguïté sur P.

18

Ensemble de réalisation d'une v.a.:

- Les valeurs de la v.a. X sont dites réalisations de X.
- L'ensemble de ces réalisations est noté $X(\Omega)$.

Loi de probabilité d'une v.a.:

Définition:

- La mesure de probabilité, notée P_X , définie sur $\mathcal{B}(IR)$ par:

$$P_X(B)= P(X^{-1}(B)) =P(\{\omega\in\Omega:X(\omega)\in B\})=P(\{X\in B\})$$
$$=P(X \in B)$$

est appelée loi de probabilité de la v.a. X

20

Loi de probabilité d'une v.a.:

Remarque:

- Sur l'espace probabilisé (Ω, A, P), si l'on se donne une loi, on peut toujours l'écrire comme une loi image par une application mesurable (prendre l'identité pour la v.a.!).
- Donc, toute mesure de probabilité est la loi d'une v.a.

30

Fonctions de répartitions:

Soit X une v.a. réelle (i.e. X est à valeurs réelles), définie sur un espace probabilisé (Ω, A, P).

Définition:

On appelle fonction de répartition de X ou de sa loi P_X, et on note F_X, la fonction sur IR définie par

$$\begin{aligned} F_X(t) &= P_X(]-\infty,t]) \\ &= P(\{\omega : X(\omega) \leq t\}) \\ &= P(X \leq t) \quad ; \qquad \forall t \in IR \end{aligned}$$

22

Fonctions de répartitions:

Propriétés:

Une fonction de répartition F vérifie les propriétés suivantes:

i. $0 \leq F \leq 1$

ii. F est croissante, continue à droite avec une limite à gauche en tout point,

iii. $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$ et $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$

Réciproquement, une fonction F vérifiant (i)-(iii) est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

23

Fonctions de répartitions-Propriétés:

Preuves:

i. Vient de ce que P est à valeurs dans $[0,1]$.

ii. La croissance découle de la croissance des mesures (i.e. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$).

La continuité à droite peut être vue comme une conséquence de la proposition:

Si $A_{i+1} \subset A_i$ pour tout i et $\mu(A_i) < +\infty$ pour un certain i, alors $\mu\left(\bigcap_i A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$

24

Fonctions de répartitions-Propriétés:

Preuves:

en remarquant que $\{X \le t\} = \bigcap_{n \ge 1} \left\{ X \le t + \frac{1}{n} \right\}$

et que la croissance de F implique

$$\lim_{h \to 0} F(t+h) = \lim_{n \to \infty} F\left(t + \frac{1}{n} \right) = F(t)$$

- La limite à gauche est également une conséquence de la croissance de F.

25

Fonctions de répartitions-Propriétés:

Preuves:

iii. Vient encore de la proposition précédente, en remarquant que $\varnothing = \bigcap_{n \ge 1} \{X \le -n\}$ et donc

$$0 = P(\varnothing) = \lim_{n \to \infty} P(X \le -n) = \lim_{n \to \infty} F(-n)$$

tandis que $1 = P(\Omega) = \lim_{n \to \infty} P(X \le n)$ d'après la même proposition.

26

Fonctions de répartitions-Propriétés:

Preuves:

- Pour la réciproque; soit G une fonction vérifiant (i)-(iii). Définissons pour $a<b$, la fonction d'ensemble $\mu(]a,b[)=F(b)-F(a)$.
- La définition de μ s'étend à l'algèbre des réunions finies d'intervalles.
- Le théorème de prolongement permet ensuite de conclure.

27

v.a. discrète:

Définition:

- Une v.a. X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est dite discrète si l'ensemble de ses réalisations $X(\Omega)$ a un nombre fini (ou infini dénombrable) d'éléments.

28

v.a. discrète:

Remarque:

Soient x_1, x_2,x_3,… les réalisations de X

$$X(\Omega)=\{x_1, x_2,x_3,\dots\}$$

On note pour tout i=1,2,3,…

$$X^{-1}(\{x_i\})=\{\omega\in\Omega/X(\omega)=x_i\}=(X=x_i)$$

Les évènements (X=x_i) forment un système complet et $\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$

Loi de probabilité d'une v.a. discrète:

Définition:

Les nombres $P(X=x_i)$ notés p_i vérifiant

$p_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

forment une loi de probabilité de la v.a. discrète X.

Fonction de répartition d'une v.a. discrète:

Définition:

La fonction de répartition de la v.a. discrète X est donnée par:

$\forall\ x \in IR$; $F(x)=P(X \leq x)= \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_i$

v.a. continue:

Définition:

Soit une v.a.r. X définie sur (Ω, $\mathcal{A}$, P) dont la fonction de répartition est F.

La v.a. X est dite continue s'il existe une fonction positive f telle que:

$\forall\ x \in IR$; $F(x)=P(X \leq x)= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

la fonction f est dite fonction de densité de probabilité de X.

32