Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année: 2018-2019
S.M.A.
Semestre 6

Probabilités 2

Prof. Mohamed El Merouani
https://elmerouani.jimdo.com/
e-mail: m_merouani@yahoo.fr

1

Appelation:

Si $E(X)=0$, la v.a. X est dite centrée

Propriétés:

Soient X et Y deux v.a. et α une constante. On a:

1. $E(\alpha)=\alpha$
2. $E(X+\alpha)=E(X)+\alpha$
3. $E(\alpha X)=\alpha E(X)$
4. $E[X-E(X)]=0$
5. $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

2

Espérance d'une fonction d'une v.a.

Théorème de transfert:

Soit X une v.a. et g une fonction Borel-mesurable, et soit Y=g(X). Alors E(g(X))=E(Y).

Si X est discrète:

$$E\left(Y\right)=\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)P\left(X=x_i\right)=\sum_{j=1}^{\infty} y_j P\left(Y=y_j\right)$$

Si X est continue:

$$E\left(Y\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f\left(g^{-1}(y)\right)\left(g^{-1}(y)\right)'dy$$

Exemple 1:

- Soit X une v.a. discrète de loi

x_i	–3	0	3
P(X=x_i)	1/4	1/2	1/4

- En posant Y=X^2, d'après le théorème de transfert, on a:

$$E(Y)=\sum_i g(x_i)P\left(X=x_i\right)=(-3)^2\cdot\frac{1}{4}+0^2\cdot\frac{1}{2}+(3)^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{2}$$

- Mais, on peut aussi écrire la loi de Y:

y_j	0	9
P(Y=y_j)	1/2	1/2

d'où $E(Y)=0\cdot\frac{1}{2}+9\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

Exemple 2:

- Soit X une v.a. continue de densité de probabilité:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\left(1 - x^2\right) & si \;\; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & autrement \end{cases}$$

- Calculons $E(X^2)$.
- L'application directe du théorème de transfert donne:

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{3}{2}\int_0^1 x^2\left(1 - x^2\right)dx = \frac{1}{5}$$

5

Variance et écart-type:

On définit une mesure de dispersion de X autour de son espérance mathématique dite variance de X.

Définition:

Si $E(X^2)$ existe, on appelle variance d'une v.a. X, le nombre $Var(X)=E((X-E(X))^2)$.

On appelle écart-type de X, le nombre

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

6

Propriétés de la variance:

1. $Var(X)=E(X^2)-E(X)^2$ (Formule réduite)
2. $\forall a,b \in IR$, on a: $Var(aX+b)=a^2Var(X)$
3. $Var(X)=0 \Leftrightarrow X=$ constante (p.s.)
4. $Var(X)<E(X-C)^2, \quad \forall\, C \neq E(X)$

   car, $E(X-C)^2= E(X-E(X))^2+ (C- E(X))^2$

   puisque $2(E(X) -C)\, E(X-E(X)) =0$
5. Si $E(|X|^2)<\infty$, la v.a. $Z=\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est telle que $E(Z)=0$ et $\sigma(Z)=1$.

Z est dite v.a. centrée et réduite associée à la v.a. X.

7

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev:

- Faute de connaître une probabilité exacte, il suffit parfois de trouver une borne supérieure ou inférieure à cette probabilité. Le théorème suivant qui lie l'espérance mathématique et l'écart-type répond à ce genre de questions.

Théorème:

Soit X une v.a. telle que $E(X)$ et $Var(X)$ existent. Pour tout ε réel ($\varepsilon>0$) on a:

$$P\left(\left|X-E(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

8

Remarque:

- En posant ε=tσ, on obtient une autre variante du théorème:

$$P\left(\left|X - E(X)\right| \geq t\sigma\right) \leq \frac{1}{t^2}$$

et
$$P\left(\left|X - E(X)\right| < t\sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{t^2}$$

9

Démonstration (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev):

Si X v.a. discrète:

$$Var(X) = E\left(X - E(X)\right)^2 = \sum_i \left(x_i - E(X)\right)^2 P\left(X = x_i\right)$$

$$= \sum_{i\in I} \left(x_i - E(X)\right)^2 P\left(X = x_i\right) + \sum_{i\in J} \left(x_i - E(X)\right)^2 P\left(X = x_i\right)$$

où $I = \left\{i \in \mathbb{N} / \left|x_i - E(X)\right| \geq \varepsilon\right\}$ et $J = I^c$

On obtient $Var(X) \geq \sum_{i\in I} \left(x_i - E(X)\right)^2 P\left(X = x_i\right)$

Puisque, on a $|x_i - E(X)| \geq \varepsilon$, on peut écrire:

$$Var(X) \geq \sum_{i\in I} \left(x_i - E(X)\right)^2 P\left(X = x_i\right) \geq \varepsilon^2 \sum_{i\in I} P\left(X = x_i\right)$$

10

Mais comme

$$\sum_{i\in I} P\left(X = x_i\right) = P\left(\bigcup_{i\in I}(X = x_i)\right) = P\left(\left|X - E(X)\right| \geq \varepsilon\right)$$

On obtient finalement $Var(X) \geq \varepsilon^2 P\left(\left|X - E(X)\right| \geq \varepsilon\right)$

d'où le résultat.

<u>Si X v.a. absolument continue de densité *f*</u>:

Soit ε>0. On a: $Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(x - E(X)\right)^2 f(x)dx$

$$= \int_{-\infty}^{E(X)-\varepsilon}\left(x-E(X)\right)^2 f(x)dx + \int_{E(X)-\varepsilon}^{E(X)+\varepsilon}\left(x-E(X)\right)^2 f(x)dx + \int_{E(X)+\varepsilon}^{+\infty}\left(x-E(X)\right)^2 f(x)dx$$

Ces trois intégrales sont positives ou nulles; d'où:

$$Var(X) \geq \int_{-\infty}^{E(X)-\varepsilon}\left(x - E(X)\right)^2 f(x)dx + \int_{E(X)+\varepsilon}^{+\infty}\left(x - E(X)\right)^2 f(x)dx$$

11

Sur l'intervalle]-∞, $E(X)$-ε], on a $x \leq E(X)-\varepsilon$

et sur l'intervalle [$E(X)$+ε,+∞[, on a $E(X)+\varepsilon \leq x$

On a, donc, $x-E(X) \leq -\varepsilon$ et $x-E(X) \geq \varepsilon$

C'est-à-dire $|x-E(X)| \leq \varepsilon$ ou $(x-E(X))^2 \leq \varepsilon^2$

On obtient, alors,

$$Var(X) \geq \int_{-\infty}^{E(X)-\varepsilon} \varepsilon^2 f(x)dx + \int_{E(X)+\varepsilon}^{+\infty} \varepsilon^2 f(x)dx$$

ou $$Var(X) \geq \varepsilon^2\left(\int_{-\infty}^{E(X)-\varepsilon} f(x)dx + \int_{E(X)+\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx\right)$$

C'est-à-dire $Var(X) \geq \varepsilon^2\left(P(X \leq E(X) - \varepsilon) + P(X \geq E(X) + \varepsilon)\right)$

ou $$Var(X) \geq \varepsilon^2 P\left(\left|X - E(X)\right| \geq \varepsilon\right)$$

ou encore $$P\left(\left|X - E(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2} \quad \square$$

12

Moments d'ordres supérieurs:

Définition:

On appelle moment d'ordre k d'une v.a. X, le nombre m_k défini par:

$$m_k = E(X^k) = \begin{cases} \sum_i x_i^k P\left(X = x_i\right) & si \;\; X \;\; discrète \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx & si \;\; X \;\; continue \end{cases}$$

13

Moments d'ordres supérieurs:

Définition:

On appelle moment centré d'ordre k d'une v.a. X, le nombre μ_k défini par:

$$\mu_k = E\left(X - E(X)\right)^k = \begin{cases} \sum_i \left(x_i - E(X)\right)^k P\left(X = x_i\right) & si \;\; X \;\; discrète \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(X)\right)^k f(x)dx & si \;\; X \;\; continue \end{cases}$$

14

Moments d'ordres supérieurs:

Remarques:

1. Le moment d'ordre 1, noté m_1 ou m est l'espérance mathématique $E(X)=m$.
2. Le moment centré d'ordre 2, noté μ_2 est la variance $\mu_2=Var(X)$
3. Comme pour l'espérance et la variance, les moments peuvent parfois ne pas exister (la série ou l'intégrale divergent).

15

Couple de variables aléatoires:

Définition:

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

Soient X et Y deux v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Une application (X, Y) de Ω dans IR^2, qui à tout ω de Ω fait correspondre un couple $(X(\omega), Y(\omega))$ de IR^2, s'appelle un couple de v.a.
(X, Y) s'appelle aussi v.a. à deux dimensions.

16

Loi de probabilité conjointe de deux v.a. discrètes:

Un couple de v.a. (X, Y) peut prendre les valeurs suivantes:

$$(x_1,y_1), (x_2,y_2);\ldots;(x_i,y_j);\ldots;(x_n,y_m)$$

A chaque couple (x_i,y_j) correspond une probabilité p_{ij} d'observer simultanément la valeur x_i pour X et la valeur y_j pour Y:

$$p_{ij}=P(X=x_i \text{ et } Y=y_j)=P(X=x_i, Y=y_j)$$

On a $\quad 0\leq p_{ij}\leq 1 \quad$ et $\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$

$$\forall\, i=1,2,\ldots,n \quad ; \quad \forall\, j=1,2,\ldots, m$$

17

Fonction de répartition d'un couple de v.a. discrètes:

On appelle fonction de répartition d'une v.a. discrète à deux dimensions (X, Y) la fonction définie par:

$$F(x,y) = P\left(X \leq x, Y \leq y\right) = \sum_{x_i \leq x}\sum_{y_j \leq y} P\left(X = x_i, Y = y_j\right)$$

18

Lois de probabilités marginales:

- La probabilité $P(X{=}x_i){=}p_{i\bullet}$ est appelée loi marginale de X. On a:

$$P(X{=}x_i){=}p_{i\bullet} = \sum_j p_{ij} \quad ; \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

- La probabilité $P(Y{=}y_j){=}p_{\bullet j}$ est appelée loi marginale de Y. On a:

$$P(Y{=}y_j){=}p_{\bullet j} = \sum_i p_{ij} \quad ; \quad j = 1, 2, \cdots, m$$

19

Lois de probabilités marginales:

$X \backslash Y$	y_1	....	y_j	....	y_m	$\sum_j p_{ij}$
x_1	p_{11}	....	p_{1j}	....	p_{1m}	$p_{1\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	....	p_{ij}	....	p_{im}	$p_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	....	p_{nj}	....	p_{nm}	$p_{n\bullet}$
$\sum_i p_{ij}$	$p_{\bullet 1}$	....	$p_{\bullet j}$	....	$p_{\bullet m}$	1

20

Loi de probabilités conjointes de deux v.a. continues:

Une v.a. à deux dimensions $Z=(X,Y)$ est dite continue s'il existe une application $f(x,y)$ appelée densité de probabilité conjointe du couple de v.a. (X,Y) vérifiant:

1. $f(x,y) \geq 0; \quad \forall (x,y) \in IR^2$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$

21

Fonction de répartition d'un couple de v.a. continues:

- La fonction de répartition du couple (X,Y) est définie par:

$$F(x,y) = P\left(X \leq x, Y \leq y\right) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$$

et l'on a

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

22

Lois marginales (Fonctions de répartitions marginales):

Les fonctions:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dvdu$$

et $$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dudv$$

sont dites fonctions de répartition marginales des v.a. X et Y respectivement.

23

Lois marginales (Fonctions de densités marginales):

- Les fonctions:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)dv$$

et $$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)du$$

sont les densités de probabilités marginales de X et Y respectivement.

24

Covariance de deux variables aléatoires:

- La covariance entre deux v. a. X et Y, notée $Cov(X,Y)$, est définie par $Cov(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$
  ou encore $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
- **Cas discrèt:**

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i\,y_j\,P(X=x_i\,,Y=y_j)-E(X)E(Y)$$

- **Cas continue:**

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\,y\,f(x,y)\,dx\,dy-E(X)E(Y)$$

Proprietés:

- Soient X et Y deux v. a. La covariance est une forme bilinéaire symétrique:

1) $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$

2) $Cov(X+Y,\ Z)=Cov(X,\ Z)+Cov(Y,\ Z)$

3) $Cov(\lambda X,Y)=\lambda Cov(X,Y)$

Remarque:

Pour X=Y, on retrouve la variance de X comme covariance de (X, X):

$$Cov(X,X)=E[(X\text{-}E(X))(X\text{-}E(X))]$$
$$=E[(X\text{-}E(X))^2]=Var(X)$$

Proprietés:

$$\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$$

En effet; $\mathrm{Var}(X+Y)= \mathrm{E}[(X+Y)\text{-}\mathrm{E}(X+Y)]^2=\mathrm{E}[(X\text{-}\mathrm{E}(X))+(Y\text{-}\mathrm{E}(Y))]^2$

$=\mathrm{E}[(X\text{-}\mathrm{E}(X))^2+2(X\text{-}\mathrm{E}(X))(Y\text{-}\mathrm{E}(Y))+(Y\text{-}\mathrm{E}(Y))^2]$

$=\mathrm{E}(X\text{-}\mathrm{E}(X))^2+\mathrm{E}(Y\text{-}\mathrm{E}(Y))^2+2\mathrm{E}((X\text{-}\mathrm{E}(X))(Y\text{-}\mathrm{E}(Y)))$

$=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$

Coefficient de corrélation entre deux v. a. :

- Le coefficient de corrélation entre deux v. a. X et Y, de variances non nulles, noté $\rho(X,Y)$ est définie par:

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

- Le coefficient de corrélation varie entre -1 et 1:

$$-1\leq \rho(X,Y)\leq 1$$

- Montrons que $-1 \leq \rho \leq 1$

En considérant la v.a. $aX+Y$, on a:

$$Var(aX+Y)=Var(aX)+Var(Y)+2Cov(aX+Y)$$
$$=a^2Var(X)+Var(Y)+2aCov(X,Y)$$

où $\forall a \in IR$, $Var(aX+Y) \geq 0$

La quantité positive $Var(aX+Y)$ est considérée comme un trinôme en a de signe constant. Son discriminant Δ’ est négatif ou nul:

$\Delta' = [Cov(X,Y)]^2 - Var(X)Var(Y) \leq 0$

On en déduit: $\left|\dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}\right| = |\rho| \leq 1$ □

Inégalité de Schwarz:

- Soient deux v.a. X et Y admettant des moments d'ordre 2, l'inégalité de Cauchy-Schwarz ou de Schwarz s’écrit:

$$|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$$

- Elle compare l'espérance du produit de deux variables aléatoires au produit des espérances de leurs carrés.
- Si X et Y sont deux v.a. admettant un moment d’ordre 2, alors la v.a. XY admet une moyenne.

En effet;

Soit $a \in \mathrm{IR}$ et on considère la v.a. $(aX+Y)$.

On a $E(aX+Y)^2 \geq 0$.

Comme $E(aX+Y)^2 = E(a^2X^2+2aXY+Y^2)$

$= a^2E(X^2)+2aE(XY)+E(Y^2)$

On considère le trinôme en a de signe constant. Son discriminant Δ' est négatif ou nul. $\Delta' = E(XY)^2 - E(X^2)E(Y^2) \leq 0$

On en déduit

$$\left|E(XY)\right| \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)} \quad \square$$

31

Fonctions génératrices :

Soit X une v.a. discrète telle que $p_k=P(X=k)$; $k=1,2,\ldots$avec $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

Définition:

La fonction définie par: $G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k s^k = E\left(s^X\right)$

qui converge pour $|s| \leq 1$, est dite fonction génératrice de probabilité de X.

32

Fonctions génératrices :

Conséquences:

Les moments de la v.a. X s'ils existent peuvent être déterminés par les dérivées de $G(s)$ au point s=1.

En effet;

$$G'(s)=\sum_{k=1}^{\infty} kp_k s^{k-1} \Rightarrow G'(1)=E(X) \ si \ E\left|X\right|<\infty$$

$$G''(s)=\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)p_k s^{k-2} \Rightarrow G''(1)=E\left(X(X-1)\right) \ si \ EX^2<\infty$$

$$=E\left(X^2-X\right)=E(X^2)-E(X)$$

et ainsi de suite…

$E(X^2)=G'(1)+G''(1)$

et $Var(X)=G''(1)+G'(1)-[G'(1)]^2$

33

Exemple:

- Soit la v.a. de Poisson définie par:

$$P\left(X=k\right)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}; \ k=0,1,2,\cdots$$

- On a: $G(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(s\lambda\right)^k\frac{e^{-\lambda}}{k!}=e^{-\lambda}e^{s\lambda}=e^{-\lambda(1-s)} \ ; \left|s\right|\le 1$
- Donc

$$G'(s)=\lambda e^{-\lambda(1-s)}$$

$$G''(s)=\lambda^2 e^{-\lambda(1-s)}$$

$$E(X)=G'(1)=\lambda$$

$$E\left(X^2-X\right)=\lambda^2$$

$$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=\lambda$$

34

Fonction génératrice des moments:

- La fonction génératrice des moments est définie pour toute v.a. X par:

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} P(X = x) & \text{si } X \text{ est discrète} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx & \text{si } X \text{ est continue} \end{cases}$$

Si $E(e^{tX})$ existe dans un voisinage de l'origine.

Théorème:

Si $M(t)$ existe pour $t \in]-t_0,t_0[$, $t_0>0$, alors ses dérivées de tout ordre existent pour t=0

et de plus $M^{(k)}(0)=E(X^k)$, $k = 0,1,2,\ldots$

C'est-à-dire que:

Tout les moments d'ordre k peuvent être calculés à l'aide des dérivées de $M(t)$ au point t =0.

- En effet, $M'(t) = \frac{d}{dt} E\left(e^{tX}\right)$

<u>Si X est discrète:</u>

$$M'(t) = \frac{d}{dt}\left[\sum_x e^{tx} P\left(X = x\right)\right] = \sum_x \frac{d}{dt} e^{tx} P\left(X = x\right)$$
$$= \sum_x x e^{tx} P\left(X = x\right) = E\left(Xe^{tX}\right)$$

<u>Si X est continue:</u>

$$M'(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} e^{tx} f(x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{tx} f(x)dx = E\left(Xe^{tX}\right)$$

37

- En posant t=0, on a $M'(0)=E(X)$.
- De même,

$$M''(t) = \frac{d}{dt} M'(t) = \frac{d}{dt} E\left(Xe^{tX}\right) = E\left(X^2 e^{tX}\right)$$

et $M''(0) = E\left(X^2\right)$

D'une façon générale, on a:

$$M^{(k)}(t) = E\left(X^k e^{tX}\right),\ k \geq 1$$

et $$M^{(k)}(0) = E\left(X^k\right)$$

Pr. Mohamed El Merouani 38

- Où encore, d'après le théorème précédent, Si $M(t)$ existe pour t ∈]-t_0,t_0[, t_0>0, alors on peut développer $M(t)$ en série de Mc-Laurin:

$$M(t) = M(0) + M'(0)\cdot\frac{t}{1!} + M''(0)\cdot\frac{t^2}{2!} + \cdots + M^{(k)}(0)\cdot\frac{t^k}{k!} + \cdots$$

- Ainsi $E(X^k)$ est le coefficient de $\dfrac{t^k}{k!}$

Remarque:

- La fonction génératrice des moments $M(t)$ peut ne pas exister.
- En effet, $E(e^{tX})$ n'est pas toujours définie.

Exemple 1:

- Soit X une v.a. discrète définie par:

$$P\left(X=k\right)=\frac{6}{\pi^2}\frac{1}{k^2}; \qquad k=1,2,\ldots$$

- Donc, on a:

$$M(t)=\frac{6}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{tk}}{k^2}=\infty$$

Exemple 2:

- Soit X une v.a. continue de fonction de densité

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-x/2}, \ \ x>0$$

- Donc $M(t)=\dfrac{1}{1-2t}$ pour t<1/2

$M'(t)=\dfrac{2}{\left(1-2t\right)^2}$ et $M''(t)=\dfrac{8}{\left(1-2t\right)^3}$ pour t<1/2

On en déduit $E(X)$=2, $E(X^2)$=8 et $Var(X)$=4.

Exemple 3:

- Soit X une v.a. continue de densité de probabilité la fonction $f(x)=ce^{-|x|^{\alpha}}$, 0<α<1, x∈IR, où c est une constante déterminée par la condition $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$
- Pour t>0, on a: $\int_0^{\infty} e^{tx}e^{-x^{\alpha}}dx=\int_0^{\infty} e^{x\left(t-x^{\alpha-1}\right)}dx$

et puisque α-1<0, $\int_0^{\infty} e^{tx}e^{-x^{\alpha}}dx$ n'est pas finie pour t>0; car $e^{x\left(t-x^{\alpha-1}\right)} \underset{x\to\infty}{\sim} e^{tx}$

43

- D'où $M(t)$ n'existe pas!
- Pourtant,

$$E\left(|X|^{n}\right)=c\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{n}e^{-|x|^{\alpha}}dx=2c\int_0^{\infty} x^{n}e^{-x^{\alpha}}dx$$

- Par un changement de variable $y=x^{\alpha}$, on obtient:

$$E\left(|X|^{n}\right)=\frac{2c}{\alpha}\int_0^{\infty} y^{\frac{n+1}{\alpha}-1}e^{-y}dy=\frac{2c}{\alpha}\Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}\right)<\infty *$$

- On remarque, donc, que même si $M(t)$ est infini, les moments peuvent être finis.

$*\Gamma$ est la fonction gamma d'Euler.

44

Fonction Gamma Γ d'Euler:

La fonction Γ est définie sur]0,+∞[par:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

Propriétés:

1) $\boxed{\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1).}$

En effet,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt = (\alpha-1)\int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-2} dt = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

2) $\boxed{\Gamma(1)=1.}$

En effet, $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$

3) $\boxed{\Gamma(n)=(n-1)!}$

En effet, $\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)=$

$=(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)=\ldots=(n-1)!\Gamma(1)=(n-1)!$