Séance 7
Fonctions Caractéristiques (2)

Prof. Mohamed El Merouani

2018/2019

Soit F la fonction de répartition d'une v.a. et soit φ sa fonction caractéristique.
Nous nous proposons d'exprimer F à partir de φ.

Théorème général :

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Alors :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[F(b+0) + F(b-0)\right] - \frac{1}{2}\left[F(a+0) + F(a-0)\right]$$

$$\left|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi(t)\right| = |\varphi(t)|\left|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\right| \leq b-a$$

Donc, en vertu du **théorème de Fubini**, on peut permuter les opérateurs d'intégration et écrire :

$$I_T = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dF(x)\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}e^{itx}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dF(x)\int_{-T}^{T}\frac{e^{-it(x-a)}-e^{-it(x-b)}}{it}dt$$

$$\text{Or,} \qquad J_T = \int_{-T}^{T} \frac{e^{-it(x-a)} - e^{-it(x-b)}}{it} dt =$$

$$= \int_{-T}^{T} \frac{\cos t(x-a) - \cos t(x-b)}{it} dt - i \int_{-T}^{T} \frac{\sin t(x-a) - \sin t(x-b)}{it} dt$$

$$= 2 \left[\int_{0}^{T} \frac{\sin t(x-a)}{t} dt - \int_{0}^{T} \frac{\sin t(x-b)}{t} dt \right]$$

$$= 2 \left[\int_{0}^{T(x-a)} \frac{\sin u}{u} du - \int_{0}^{T(x-b)} \frac{\sin u}{u} du \right]$$

L'intégrale de Dirichlet $S(v) = \int_0^v \frac{\sin u}{u} du$ est telle que $S(v) \longrightarrow_{v \to \pm\infty} \pm \frac{\pi}{2}$

Nous avons donc : $$J_T = 2\left[S(T(x-a)) - S(T(x-b))\right].$$

D'autre part $$I_T = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\left[S(T(x-a)) - S(T(x-b))\right] dF(x).$$

$$I_T = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{a-0} J_T dF(x) + \int_{a-0}^{a+0} J_T dF(x) + \int_{a+0}^{b-0} J_T dF(x) + \right.$$
$$\left. + \int_{b-0}^{b+0} J_T dF(x) + \int_{b+0}^{\infty} J_T dF(x)\right]$$

- Si $x < a < b$, on a :

$$S(T(x-a)) \longrightarrow_{T\to\infty} -\frac{\pi}{2}, S(T(x-b)) \longrightarrow_{T\to\infty} -\frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{a-0} J_T dF(x) = 0.$$

- Si $x = a < b$, on a :

$$S(T(x-a)) = 0, S(T(x-b)) \longrightarrow_{T\to\infty} -\frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\lim_{T\to\infty} \int_{a-0}^{a+0} J_T dF(x) = \pi\left[F(a+0) - F(a-0)\right]$$

Détermination d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ par sa fonction caractéristique :

Preuve du Théorème général :

- Si $a < x < b$, on a :

$$S(T(x-a)) \longrightarrow_{T\to\infty} \frac{\pi}{2}, S(T(x-b)) \longrightarrow_{T\to\infty} -\frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\lim_{T\to\infty} \int_{a+0}^{b-0} J_T dF(x) = 2\pi \left[F(b-0) - F(a+0)\right]$$

- Si $a < x = b$, on a :

$$S(T(x-a)) \longrightarrow_{T\to\infty} \frac{\pi}{2}, S(T(x-b)) = 0.$$

Donc

$$\lim_{T\to\infty} \int_{b-0}^{b+0} J_T dF(x) = \pi \left[F(b+0) - F(b-0)\right]$$

- Si $a < b < x$, on a :

$$S(T(x-a)) \longrightarrow_{T\to\infty} \frac{\pi}{2}, S(T(x-b)) \longrightarrow_{T\to\infty} \frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\lim_{T\to\infty} \int_{b+0}^{\infty} J_T dF(x) = 0$$

En résumé :

$$\lim_{T\to\infty} I_T = \frac{1}{2\pi}\left[\pi(F(a+0) - F(a-0)) + \right.$$

$$\left. 2\pi(F(b-0) - F(a+0)) + \pi(F(b+0) - F(b-0))\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[F(b+0) + F(b-0)\right] - \frac{1}{2}\left[F(a+0) + F(a-0)\right] \blacksquare$$

Corollaire 1 :

Si a et b sont deux points de continuité de F. On a :

$$F(b) - F(a) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt$$

Formule d'inversion (Paul-Levy)

Corollaire 2 :

Si φ est **absolument intégrable**, la fonction de répartition F est dérivable dans $\mathbb{R}$ et de plus

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt$$

(Formule de réciprocité de Fourier)

Preuve :

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx}-e^{-it(x+h)}}{ith}\varphi(t)dt$$

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{1 - e^{-ith}}{ith} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

$$\text{Or,} \quad \left| \frac{1 - e^{-ith}}{ith} e^{-itx} \varphi(t) \right| \leq |\varphi(t)|$$

et puisque, par hypothèse $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt < \infty$, on peut en vertu de théorème de Lebesgue, passer à la limite sous l'opérateur d'intégration et on a :

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{1 - e^{-ith}}{ith} e^{-itx} \varphi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-ith}}{ith} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

$$
\begin{aligned}
F'(x) = f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{h\to 0}\frac{1-e^{-ith}}{ith}e^{-itx}\varphi(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi(t)dt
\end{aligned}
$$

Cette dernière intégrale est absolument convergente en x : C'est une fonction continue en x.
Donc, la v.a. correspondante à $F(x)$ est absolument continue, de densité f. $\blacksquare$

Exemple

Trouvons la densité de la v.a. dont la fonction caractéristique est $\varphi(t) = e^{-c|t|}$.

En effet, puisque $\varphi(t)$ est absolument intégrable, la distribution est absolument continue avec la densité :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}e^{-c|t|}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{t(c-ix)}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-t(c+ix)}dt$$

Les fonctions à intégrer sont holomorphes, donc

$$f(x) = \frac{1}{2\pi(c-ix)}\left[e^{t(c-ix)}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2\pi(c+ix)}\left[e^{-t(c+ix)}\right]_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{c-ix} + \frac{1}{c+ix}\right] = \frac{c}{\pi(c^2+x^2)}$$

Théorème :

Si deux fonctions de répartitions correspondent à la même fonction caractéristique, alors elles sont égales.

$$\text{i.e.} \qquad \varphi_{F_1} = \varphi_{F_2} \Longrightarrow F_1 = F_2$$

Proposition :

Soit $\varphi_X(u)$ est la fonction caractéristique d'une v.a. X et $\varphi_Y(u)$ est la fonction caractéristique d'une v.a. Y.
X et Y ont la même distribution (loi) si, et seulement si $\varphi_X(u) = \varphi_Y(u)$.