Conditionnement et Indépendance

Prof. Mohamed El Merouani

2018/2019

Définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit $H \in \mathcal{A}$ avec $P(H) > 0$. On définie la probabilité conditionnelle par :

$$P(A/H) = P_H(A) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}$$

L'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P_H)$ est bien un espace probabilisé ; $P_H(.) = P(./H)$ est bien une probabilité.

Preuve :

1. $0 \leq P_H(A) \leq 1; \qquad \forall A \in \mathcal{A}$
2. $P_H(\Omega) = \frac{P(H \cap \Omega)}{P(H)} = \frac{P(H)}{P(H)} = 1$
3. $P_H(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \frac{P(H \cap (\cup_{i=1}^{\infty} A_i))}{P(H)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(H \cap A_i)}{P(H)} = \sum_{i=1}^{\infty} P_H(A_i)$

Probabilité conditionnelle :

Remarque :

Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ avec $P(A_1) > 0$ et $P(A_2) > 0$. Alors :
$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1/A_2)P(A_2) = P(A_2/A_1)P(A_1)$

Théorème :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ avec $P(\cap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0$ alors :

$$P(\cap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdots P(A_n/\cap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

Théorème de Bayes :

Soit $(H_n)_n$ une suite d'évènements disjoints de $\mathcal{A}$ tels que $P(H_n) > 0$; $n = 1, 2, \ldots$ et $\cup_{n=1}^{\infty} H_n = \Omega$. Soit $B \in \mathcal{A}$ avec $P(B) > 0$, alors :

$$P(H_j/B) = \frac{P(H_j)P(B/H_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i).P(B/H_i)}; \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Indépendance des évènements :

Définition :

Les évènements A et B sont dits indépendants si :

$$P(A/B) = P(A) \qquad \text{avec} \qquad P(B) > 0$$

$$\text{et} \qquad P(B/A) = P(B) \qquad \text{avec} \qquad P(A) > 0$$

Conséquences :

1. A et B indépendantes $\Longleftrightarrow P(AB) = P(A).P(B)$
2. A et B indépendantes $\Longleftrightarrow A$ et $\overline{B}$ indépendantes
3. A et B indépendantes $\Longleftrightarrow \overline{A}$ et B indépendantes
4. A et B indépendantes $\Longleftrightarrow \overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendantes

Indépendance des évènements :

Définition :

Les évènements $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont dits indépendants si :

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_j}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_j}); j = 2, 3, \ldots$$

Dans le cas de trois évènements A, B et C, on a : A, B, C sont indépendantes (dans leur ensemble) si, et seulement si,

$$\begin{aligned}
P(AB) &= P(A)P(B) \\
P(AC) &= P(A)P(C) \\
P(BC) &= P(B)P(C) \\
P(ABC) &= P(A)P(B)P(C)
\end{aligned}$$

Indépendance des évènements :

Conséquences :

1. L'indépendance implique l'indépendance deux à deux. Pourtant, l'inverse n'est pas vrai.
2. $A_1, A_2, \cdots, A_n$ indépendantes

$$\iff \begin{cases} A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, \overline{A_n} & \text{indépendantes} \\ A_1, A_2, \cdots, \overline{A_{n-1}}, \overline{A_n} & \text{indépendantes} \\ \vdots & \\ \overline{A_1}, \overline{A_2}, \cdots, \overline{A_{n-1}}, \overline{A_n} & \text{indépendantes} \end{cases}$$

Soit (X, Y) un couple de v.a. discrètes.
Soient $A = \{X = x_i\} = \{(x_i, y) : -\infty < y < +\infty\}$ et
$B = \{Y = y_j\} = \{(x, y_j) : -\infty < x < +\infty\}$ qui sont des évènements.
Supposons que $P(B) = p_{.j} > 0$. Alors on a :

$$P(A/B) = P(X = x_i/Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{.j}} = P_{i/j}$$

Pour j fixé, nous avons : $P(X = x_i/Y = y_j) \geq 0$ et
$\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i/Y = y_j) = 1.$
Ainsi, $P(X = x_i/Y = y_j)$ pour j fixé, définit une **loi de probabilité**.

Définition :

Soit (X, Y) un couple de v.a. discrètes.
Si $P(Y = y_j) > 0$, la fonction $P(X = x_i/Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$, pour j fixé est dite **distribution ou loi de X conditionnée par la valeur $Y = y_j$**.

Dans le cas continue : Soit (X, Y) un couple de v.a. continues. Puisque $P(X = x) = P(Y = y) = 0; \forall x, y$, les probabilités $P(X \leq x/Y = y)$ et $P(Y \leq y/X = x)$ ne sont pas définies.
Supposons que $P(y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon) > 0$ pour $\varepsilon > 0$ et considérons la probabilité conditionnelle suivante :

$$P(X \leq x/y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon) = \frac{P(X \leq x, y - \varepsilon < y \leq y + \varepsilon)}{P(y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon)}$$

Définition :

La distribution de X conditionnée par $Y = y$ est définie par :

$$F_{X/Y}(x/y) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} P(X \leq x/y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon)$$

si cette limite existe.

La densité de X conditionnée par $Y = y$ est une fonction positive $f_{X/Y}(x/y)$ telle que

$$F_{X/Y}(x/y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X/Y}(t/y)dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Pour y fixé, on voit effectivement que : $f_{X/Y}(x/y) \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X/Y}(x/y)dx = 1$

$$\text{Or,} \qquad F_{X/Y}(x/y) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{P(X \leq x, y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon)}{P(Y \in]y - \varepsilon, y + \varepsilon])}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\int_{-\infty}^{x}(\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} f(u,v)dv)du}{\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} f_2(v)dv} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\int_{-\infty}^{x}(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} f(u,v)dv)du}{\frac{1}{2\varepsilon}\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} f_2(v)dv}$$

$$F_{X/Y}(x/y) = \frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,y)du}{f_2(y)} = \int_{-\infty}^{x} \left(\frac{f(u,y)}{f_2(y)} \right) du$$

Donc, $$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}, f_2(y) > 0$$

D'où le théorème :

Théorème :

Soit $f(x,y)$ la densité de (X,Y) et soit $f_2(y)$ la densité marginale de Y. La densité de X conditionnée par $Y = y$ existe et elle est donnée par :

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

où (x,y) est un point de continuité de f et $f_2(y) > 0$ et elle est continue aussi.

Remarque :

$$\int_{-\infty}^{x} f(u, y)du = f_2(y)F_{X/Y}(x/y)$$

et

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{x} f(u, y)du \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y)F_{X/Y}(x/y)dy$$

Définition :

X et Y sont dits indépendantes si $F(x,y) = F_1(x).F_2(y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Lemme :

Si X et Y sont indépendantes et si $a < c, b < d$ sont des réels, on a :
$P(a < X \leq c, b < Y \leq d) = P(a < X \leq c).P(b < Y \leq d)$

Preuve :

$$P(a < X \leq c, b < Y \leq d) = F(c,d) - F(c,b) + F(a,b) - F(a,d)$$

$$= F_1(c)F_2(d) - F_1(c)F_2(b) + F_1(a)F_2(b) - F_1(a)F_2(d)$$

$$= [F_1(c) - F_1(a)]\,[F_2(d) - F_2(b)] = P(a < X \leq c)P(b < Y \leq d)$$

$\blacksquare$

Théorème :

1. Les v.a. discrètes X et Y sont indépendantes si, et seulement si, $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i).P(Y = y_j); \forall i, j$
2. Les v.a. continues X et Y sont indépendantes si, et seulement si, $f(x, y) = f_1(x).f_2(y); \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Preuve :

(1) D'après le lemme 1, si on fait tendre a vers c et b vers d, on a $P(X = c, Y = d) = P(X = c).P(Y = d)$.
Réciproquement, Soit $F(x, y) = \sum_B P(X = x_i, Y = y_j)$ où $B = \{(i, j) : x_i \leq x, y_j \leq y\}$. Alors,
$F(x, y) = \sum_B P(X = x_i).P(Y = y_j)$ (Par hypothèse)
$= \sum_{x_i \leq x} \left[\sum_{y_j \leq y} P(Y = y_j)\right] P(X = x_i) = F_1(x).F_2(y)$.

Preuve :

(2) Supposons que X et Y soient indépendantes, alors

$$F(x,y) = F_1(x)F_2(y)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[F_2(y)\frac{\partial}{\partial x}F_1(x)\right] = f_1(x)f_2(y)$$

Réciproquement, Supposons que $f(x,y) = f_1(x).f_2(y)$. Alors, on a :

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv = \int_{-\infty}^{y} f_2(v)\left(\int_{-\infty}^{x} f_1(u)du\right)dv =$$

$$= F_1(x)F_2(y) \qquad \blacksquare$$

Corollaire :

Soient X et Y des v.a. indépendantes. Alors :

$$F_{Y/X}(y/x) = F_2(y), \quad \forall y \quad \text{et} \quad F_{X/Y}(x/y) = F_1(x), \quad \forall x$$

En effet,

$$F_{Y/X}(y/x) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y/X}(t/x)dt = \int_{-\infty}^{y} f_2(t)dt = F_2(y)$$

$$F_{X/Y}(x/y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X/Y}(t/y)dt = \int_{-\infty}^{x} f_1(t)dt = F_1(x)$$

Indépendance de deux variables aléatoires :

Théorème :

Les v.a. X et Y sont indépendantes si, et seulement si, $P(X \in B_1, Y \in B_2) = P(X \in B_1).P(Y \in B_2)$, quels que soient les ensembles de Borel B_1 et B_2.

Preuve :

Ce théorème est une généralisation du lemme précédent, puisque un ensemble de Borel peut être obtenu par un ensemble dénombrable d'opération de réunion, intérsection et différence d'intervalles. On peut établir le résultat du théorème par le dit lemme après ces opérations.

Indépendance de deux variables aléatoires :

Théorème :

Soient X et Y des v.a. indépendantes et soient f et g deux fonctions Borel-mesurables. Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Preuve :

$$P(f(X) \leq x, g(Y) \leq y) = P(X \in f^{-1}]-\infty, x], Y \in g^{-1}]-\infty, y])$$

$$= P(X \in f^{-1}]-\infty, x]).P(Y \in g^{-1}]-\infty, y])$$

$$= P(f(X) \leq x).P(g(Y) \leq y)$$

Indépendance de plusieures variables aléatoires :

Définition :

Les v.a. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont dites indépendantes si :

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i), \quad \forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$