Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2018/2019
S.M.A. Semestre 6
T.D. de Probabilités 2

Série n° 4

Exercice 1 :
Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et A et B deux évènements de $\mathcal{A}$. Montrer que :

1. A et B indépendantes $\Longleftrightarrow$ A et $\overline{B}$ indépendantes
2. A et B indépendantes $\Longleftrightarrow$ $\overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendantes

Exercice 2 :
Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Montrer que pour un nombre fini d'évènements et $(A_i), i = 1, 2, \cdots, n$ avec $P(\cap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0$ on a :

$$P(\cap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdots P(A_n/\cap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

Exercice 3 :
On veut montrer qu'une v.a. qui suit une loi géométrique n'a pas de mémoire. Pour cela, on considère une v.a. X qui suit une loi géométrique de paramètre p avec $0 < p < 1$; alors, montrer que pour tout $k_0 \geqslant 0$ et $k > 1$,

$$P(X \geqslant k_0 + k/x > k_0) = P(X \geqslant k).$$

Exercice 4 :
Soit X une v.a. qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et Y une v.a. prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que pour tout n entier naturel, $(Y/X = n) \sim \mathcal{B}(n, p)$. Déterminer la loi de Y.

Exercice 5 :
Soient X et Y deux v.a. indépendantes telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$. Montrer que la distribution conditionnelle de X par $X + Y$ est une loi binomiale.

Exercice 6 :
Soient X et Y deux v.a. indépendantes de lois $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$.
α et β étant deux nombres tels que $\alpha \leqslant \beta$. Calculer $P(X = \alpha/X + Y = \beta)$.

Exercice 7 :
On considère la loi trinomiale définie par :

$$P(X = x, Y = y) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p_1^x p_2^y p_3^{n-x-y},$$

$$\text{où } (x, y) \in \mathbb{Z}_+^2 \text{ et } p_j \geqslant 0 \text{ avec } p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

1. Déterminer la loi marginale de X.
2. Déterminer la loi conditionnelle de Y par $X = x$.