Université Abdelmalek Essaâdi
ENSA de Tétouan

Année universitaire : 2014-2015
1ère année de cycle ingénieur

Contrôle Continu N°2
de Probabilités, Statistiques et Calcul Stochastique
(Durée : 2 heures)

Exercice 1 : (6 points)

Une variable aléatoire X est dite de Weibull de paramètres $\alpha>0$ et $\beta>0$, si la variable X^α suit une loi exponentielle de paramètre $\beta>0$. Sa fonction de répartition est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta x^\alpha} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

1°) Déterminer sa fonction de densité de probabilité f.

2°) Calculer son espérance mathématique et sa variance.

On rappelle que $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$ est la seconde fonction d'Euler.

Exercice 2 : (8 points)

Considérons une population composée de N individus parmi lesquels une proportion p possède un caractère donné. On tire de cette population au hasard et sans remise un échantillon de taille n ($n \leq N$).

1°) Soit X le nombre aléatoire d'individus de cet échantillon possédant le caractère envisagé. Monter que $P(X=k) = \dfrac{C_{pN}^{k} C_{(1-p)N}^{n-k}}{C_N^n}; \quad \forall k, \ 0 \leq k \leq n.$

Quelle est la loi suivie par X ?

2°) Montrer que l'espérance mathématique de X est $E(X)=np$ et sa variance est $Var(X) = \dfrac{N-n}{N-1} np(1-p)$.

3°) Soit $f_n = \dfrac{X}{n}$ la fréquence relative des individus ayant le caractère étudié parmi les n tirés.

Montrer que f_n converge en probabilité vers p.

Exercice 3 : (6 points)

1°) Une v.a. X suivant une loi géométrique de paramètre p, prenant les valeurs $k= 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ avec les probabilités $P(X=k)=p(1-p)^k$

Montrer, par la méthode directe ou bien à partir de la fonction génératrice des moments, que son espérance mathématique est $E(X) = \dfrac{1-p}{p}$ et sa variance est $Var(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

2°) Il est plus fréquent dans la pratique d'envisager la v.a. $Y=X+1$. Quelles sont les valeurs prises par Y et avec quelles probabilités ? Montrer que l'espérance mathématique de Y est $E(Y) = \dfrac{1}{p}$ et sa variance est $Var(Y) = \dfrac{1-p}{p^2}$

3°) Montrer que si Y_1 et Y_2 sont deux variables aléatoires géométriques indépendantes ayant le même paramètre p (probabilité de succès), alors la variable $Z=Y_1+Y_2$ suit une loi binomiale négative donnant la probabilité du nombre d'essais jusqu'à l'obtention de deux succès, notée $NB(2, p)$ de loi de probabilité $P(Z=k)= C_{k-1}^1 p^2(1-p)^{k-2}$; pour $k \geq 2$.

Bonne chance !

Université Abdelmalek Essaâdi
ENSA de Tétouan

2014/2015
1ère année C.I.

Corrigés de C.C. 2
Probabilités et Statistiques

Exercice 1 :

la fonction de répartition d'une loi de Weibull est :

$$F(x) = 1 - e^{-\beta x^{\alpha}} \quad \text{pour } x \geq 0$$

avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ ses paramètres

1°) Sa densité est $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = \alpha\beta x^{\alpha-1} e^{-\beta x^{\alpha}}$

pour $x \geq 0$.

2°). Son espérance mathématique est $E(X) = \displaystyle\int_0^{\infty} x\,\alpha\beta x^{\alpha-1} e^{-\beta x^{\alpha}} dx$

Soit le changement de variable : $\beta x^{\alpha} = y \Rightarrow x = \beta^{-\frac{1}{\alpha}} y^{\frac{1}{\alpha}}$

et $dx = \dfrac{1}{\alpha}\beta^{-\frac{1}{\alpha}} y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dy$; alors

$$E(X) = \int_0^{\infty} \alpha y\, e^{-y} \frac{1}{\alpha} \beta^{-\frac{1}{\alpha}} y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dy$$

$$= \beta^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{\alpha}} e^{-y} dy = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\beta^{-\frac{1}{\alpha}}$$

où $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$ est la seconde fonction d'Euler.

• Calculons, maintenant, sa variance. D'abord, on cherche $E(X^2)$. On a : $E(X^2) = \displaystyle\int_0^{\infty} \alpha\beta x^{\alpha+1} e^{-\beta x^{\alpha}} dx$

En faisant le même changement d'avant,

$$\beta x^{\alpha} = y \Rightarrow x = \beta^{-\frac{1}{\alpha}} y^{\frac{1}{\alpha}} \quad ; \quad \text{on obtient :}$$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} \alpha\beta\, \beta^{-(1+\frac{1}{\alpha})} y^{1+\frac{1}{\alpha}} e^{-y} \frac{1}{\alpha} \beta^{-\frac{1}{\alpha}} y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dy$$

$$= \beta^{-\frac{2}{\alpha}} \int_0^{\infty} y^{\frac{2}{\alpha}} e^{-y} dy = \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) \beta^{-\frac{2}{\alpha}}$$

D'où $\quad Var(X) = \beta^{-\frac{2}{\alpha}} \left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) - \left\{ \Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right\}^2 \right].$

Exercice 2 :

1°) La loi suivie par X est une hypergéométrique

On tire un échantillon de taille n. Donc

Ω = ensemble des parties à n éléments de la population

$$\text{Card } \Omega = C_N^n$$

X est la v.a correspondant au nombre d'individus de l'échantillon qui ont le caractère étudié.

On a donc : $\quad X(\Omega) = 0, 1, 2, \dots n$

$\forall k = 0, 1, 2, \dots, n \qquad P(X = k) = \dfrac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$

le nombre de façons de tirer k individus parmi ceux qui ont le caractère envisagé est C_{pN}^{k} et pour chacune de ces façons, il y a $C_{(1-p)N}^{n-k}$ manières de tirer $n-k$ individus ne possèdant pas le caractère en question.

Donc $P(X=k) = \dfrac{C_{pN}^{k}\, C_{(1-p)N}^{n-k}}{C_N^n}$

D'où $X \sim \mathcal{H}(N, n, p)$

2°)

Calcul de l'espérance mathématique de X :

Pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, notons X_i la v.a. définie par

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ individu de l'échantillon possède le caractère étudié} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

X_i est une v.a. de Bernouilli de paramètre p.

Donc : $P(X_i = 1) = p$

D'où : $E(X_i) = p$

Or, on a : $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

D'où, par linéarité de l'espérance $E(X) = np$

<u>Autre méthode</u> : On peut retrouver ce résultat en écrivant $E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\, P(X=k)$ et en utilisant la formule de Vandermonde. à la fin

Calcul de la variance de X :

Les variables aléatoires X_i sont dépendantes, donc la variance de la somme des X_i est :

$$Var(X) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i<j} cov(X_i, X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{i \neq j} cov(X_i, X_j)$$

$$Var(X_i) = p(1-p) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = np(1-p)$$

$$Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$$

le produit des variables indicatrices $X_i X_j$ des individus de l'échantillon possédant le caractère étudié lors des ièmes et jèmes tirages n'est égal à l'unité que si $X_i = 1$, $X_j = 1$,

c'est-à-dire
$$P(X_i X_j = 1) = P(X_i = 1, X_j = 1)$$
$$= P(X_j = 1 / X_i = 1) P(X_i = 1)$$
$$= P(X_j = 1 / X_i = 1)\, p$$

On voit clairement que $P(X_j = 1 / X_i = 1)$ ne dépend pas des indices i et j et vaut par exemple $P(X_2 = 1 / X_1 = 1) = \dfrac{Np-1}{N-1}$

Donc
$$Cov(X_i, X_j) = p\frac{Np-1}{N-1} - p^2$$

Comme il y a $n(n-1)$ manières de prendre des couples (X_i et X_j), il vient :
$$Var(X) = np(1-p) + n(n-1)\left[p\frac{Np-1}{N-1} - p^2\right]$$

Soit
$$Var(X) = \frac{N-n}{N-1} np(1-p).$$

3°)
$$E(f_n) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{1}{n}np = p$$
$$Var(f_n) = Var\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}Var(X) = \frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}np(1-p)$$
$$= \frac{N-n}{N-1}\frac{p(1-p)}{n}$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchybechev, on a
$$P(|f_n - E(f_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(f_n)}{\varepsilon^2}$$

$$P\left(|f_n - p| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{N-n}{N-1} \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow P\left(|f_n - p| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{N-n}{N-1} \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

chercher le max ?!

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} P\left(|f_n - p| < \varepsilon\right) = 1 \quad n \text{ ou } N$$

car $\frac{N-n}{N-1} \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

n ou N ?

Exercice 3 :

1°) $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, p(1-p)^k = p \sum_{k=0}^{\infty} k (1-p)^k$

$$= p(1-p) \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1}$$

or $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ pour $|x| < 1$

donc $E(X) = \frac{p(1-p)}{(1-(1-p))^2} = \frac{p(1-p)}{p^2} = \frac{1-p}{p}$

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p(1-p)^k = p \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (1-p)^k$

$$= p(1-p) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1}$$

$$= p(1-p) \left[\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} \right]$$

$$= p(1-p)\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-1} + \frac{1-p}{p}$$

$$= p(1-p)^2\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + \frac{1-p}{p}$$

comme $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$ pour $|x|<1$,

on a : $$E(X^2) = \frac{2p(1-p)^2}{(1-(1-p))^3} + \frac{1-p}{p}$$

$$= 2\frac{(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= 2\frac{(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + \frac{1-p}{p} = \frac{(1-p)^2 + p - p^2}{p^2} = \frac{1-2p+\cancel{p^2} + \ \cancel{-p^2}}{p^2}$$

$$= \frac{1-p}{p^2}$$

Autre méthode :

Calcul de l'espérance et la variance d'une v.a. X suivant une loi géométrique <u>débutant de zero</u> par la méthode de la fonction génératrice des moments

$$M(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} p(1-p)^k$$

alors $M(t) = p \sum_{k=0}^{\infty} \left((1-p)e^t\right)^k = \dfrac{p}{1-(1-p)e^t}$, en considérant que, dans la série géométrique, t est telle que $(1-p)e^t$ est inférieur à 1.

On peut, maintenant, déterminer l'espérance et la variance de cette loi :

$$M'(t) = \frac{p(1-p)e^t}{\left(1-(1-p)e^t\right)^2} \Rightarrow M'(0) = \frac{p(1-p)}{\left(1-(1-p)\right)^2} = \frac{1-p}{p}$$

d'où $E(X) = \dfrac{1-p}{p}$

$$M''(t) = \frac{\left(1-(1-p)e^t\right)^2 p(1-p)e^t + p(1-p)e^t\, 2\left(1-(1-p)e^t\right)(1-p)e^t}{\left(1-(1-p)e^t\right)^4}$$

$$= \frac{(1-q)^2 p(1-p)}{p^4} + \frac{2p^2q^2}{p^4} = \frac{p-p^2}{p^2} + \frac{2(1-p)^2}{p^2} = \frac{2(1-2p+p^2)+p-p^2}{p^2} = \frac{2-4p+2p^2+p-p^2}{p^2} = \frac{2-3p+p^2}{p^2}$$

$$\Rightarrow M''(0) = \frac{2(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p} = E(X^2)$$

d'où $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{2(1-p)^2}{p^2} + \dfrac{1-p}{p} - \dfrac{(1-p)^2}{p^2} = \dfrac{1-p}{p^2}$

$$= E(X^2) - E(X)^2$$

2°) $Y = X + 1$ la loi de Y ; $P(Y=k) = P(X+1=k)$
Donc les valeurs prises par Y sont $1, 2, \dots, n, \dots$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad P(X=k-1)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = p(1-p)^{k-1}$

soit donner un tableau
soit donner la loi

• L'espérance mathématique de Y :

$$E(Y) = E(X) + 1 = \frac{1-p}{p} + 1 = \frac{1-p+p}{p} = \frac{1}{p}$$

• Variance de Y : $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X+1) = \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

3°) Pour $k \geq 2$, on a :

$$P(Z=k) = P(Y_1 + Y_2 = k) = \sum_{i=1}^{k-1} P(Y_1 = i, Y_2 = k-i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} P(Y_1 = i) \cdot P(Y_2 = k-i)$$ (car Y_1 et Y_2 sont indépendantes)

$$= \sum_{i=1}^{k-1} p(1-p)^{i-1} p(1-p)^{k-i-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} p^2 (1-p)^{k-2} = (k-1) p^2 (1-p)^{k-2}$$

$$= C_{k-1}^{1} p^2 (1-p)^{k-2}$$

$$= p^2(1-p)^{k-2} \sum_{i=1}^{k-1} (1) = p^2(1-p)^{k-2}(k-1) = p^2(1-p)^{k-2} C_{k-1}^{1}$$

donc $Z = Y_1 + Y_2 \sim NB(2, p)$