**Université Abdelmalek Essaâdi**
**ENSA de Tétouan**

**Année universitaire : 2014/2015**
**$1^{ère}$ année de cycle ingénieur**

# Rattrapage de Probabilités, Statistiques et Calcul Stochastique

**Durée : 2 heures**

## Exercice 1 : ( 6 points)

1°) Soit $X$ une v.a. telle que $E(X)=\mu$ et $Var(X)=\sigma^2$ existent. Monter que pour tout réel $\varepsilon>0$ on a :

$$P(|X-\mu|\geq \varepsilon)\leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \qquad \text{(Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)}$$

2°) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(E[X_n])=\mu$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(Var[X_n])=0$

Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers $\mu$.

3°) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, ayant des moments d'ordre 2 finis. Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j$ converge en probabilité vers $E[X_1]$.

## Exercice 2 : ( 8 points)

Soient $a$ et $b$ deux nombres entiers tels que $0 < a < b$ et $\lambda \in IR_+^*$.

On considère un couple de variables aléatoires $(X, Y)$ dont la loi de probabilité est définie par :

$$P(X=i;Y=j)=e^{-b\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}C_j^i a^i(b-a)^{j-i};\ i,j\in IN;\ i\leq j$$

1°) Déterminer la loi marginale de $Y$. Donner $E(Y)$, $Var(Y)$.

2°) Déterminer la loi conditionnelle de $X$ sachant que $Y=j$.

3°) Déterminer la loi marginale de $X$.

4°) Calculer $Cov(X, Y)$.

## Exercice 3 : ( 6 points)

Soient $\theta$ un réel strictement positif et $X$ la variable aléatoire de densité $f$ définie par :

$$\forall x\geq 1,\quad f(x)=\frac{1}{\theta}x^{-\frac{1+\theta}{\theta}},\ \text{et 0 sinon.}$$

1°) Vérifier que $f$ est bien une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition associée.

2°) Calculer $P(0 < X \leq 2)$.

3°) Pour quelles valeurs de $\theta$, $X$ admet-elle une espérance mathématique ? La calculer quand elle existe.

***Bonne chance !***

ENSA de Tétouan
CI1

Année universitaire 2014/2015

# Corrigés de rattrapage de Probabilités et Statistique

## Exercice 1 :

1°) $X$ une v.a. $E(X) = \mu$ et $Var(X) = \sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right]$

- Si $X$ est discrète, alors $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 P(X = x_i)$

$$\sigma^2 = \sum_{i \in I} (x_i - \mu)^2 P(X = x_i) + \sum_{i \in J} (x_i - \mu)^2 P(X = x_i)$$

où $I = \{ i \in \mathbb{N} / \ |x_i - \mu| \geqslant \varepsilon \}$ et $J$ son complémentaire.

Donc
$$\sigma^2 \geqslant \sum_{i \in I} (x_i - \mu)^2 P(X = x_i)$$

Puisque on a $|x_i - \mu| \geqslant \varepsilon$, on peut écrire

$$\sigma^2 \geqslant \sum_{i \in I} (x_i - \mu)^2 P(X = x_i) \geqslant \varepsilon^2 \sum_{i \in J} P(X = x_i)$$

Mais comme $\sum_{i \in I} P(X = x_i) = P\left(\bigcup_{i \in I} (X = x_i)\right) = P(|X - \mu| \geqslant \varepsilon)$

d'où $\sigma^2 \geqslant \varepsilon^2 P(|X - \mu| \geqslant \varepsilon)$

c'est-à-dire $P(|X - \mu| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

- Si $X$ est continue, $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx$

Soit $S = \{ x \in \mathbb{R} / \ |x - \mu| \geqslant \varepsilon \}$, alors $\sigma^2 \geqslant \int_S (x-\mu)^2 f(x)\, dx$

donc $\sigma^2 \geqslant \varepsilon^2 \int_S f(x)\, dx = \varepsilon^2 P\left[ |X - \mu| \geqslant \varepsilon \right]$

d'où $P\left[ |X - \mu| \geqslant \varepsilon \right] \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

2°) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev écrite pour $X_n$ donne $P(|X_n - E(X_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X_n)}{\varepsilon^2}$

ou encore $P(|X_n - E(X_n)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{Var(X_n)}{\varepsilon^2}$

or, l'inégalité triangulaire nous permet d'écrire

$$|X_n - \mu| \leq |X_n - E(X_n)| + |E(X_n) - \mu|$$

et comme $\mu = \lim_{n\to+\infty} E(X_n)$ alors

$\forall \varepsilon > 0$ ; $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N_\varepsilon$ on ait

$$|E(X_n) - \mu| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc ; $\forall n \geq N_\varepsilon$, on a l'inclusion des ensembles

$$\left(|X_n - E(X_n)| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset \left(|X_n - \mu| < \varepsilon\right)$$

d'où $P(|X_n - E(X_n)| < \varepsilon) \leq P(|X_n - \mu| < \varepsilon)$

alors $P(|X_n - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{Var(X_n)}{\varepsilon^2}$

Finalement $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - \mu| < \varepsilon) = 1$ puisque $\lim_{n\to+\infty} Var(X_n) = 0$

c'est-à-dire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $\mu$.

3°) Soit $S_n$ la variable aléatoire $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$. On a :

$$E(S_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \frac{1}{n} \times n\, E(X_1) = E(X_1)$$

et $Var(S_n) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \frac{1}{n^2} \times n\, Var(X_1) = \frac{1}{n} Var(X_1)$

car les $X_j$ sont des v.a. indépendantes.

Alors $\lim_{n\to+\infty} (E(S_n)) = E(X_1)$ et $\lim_{n\to+\infty} (Var(S_n)) = 0$

par 2°) on a la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers $E(X_1)$.

## Exercice 2 :

1°) Loi marginale de $Y$ : $P(Y=j) = \sum_{i \leq j} P(X=i, Y=j)$

$$P(Y=j) = \sum_{i=0}^{j} e^{-b\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} C_j^i a^i (b-a)^{j-i}$$

$$= e^{-b\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \sum_{i=0}^{j} C_j^i a^i (b-a)^{j-i}$$

$$= e^{-b\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} (a+b-a)^j$$ (en appliquant la formule de binôme de Newton)

$$= e^{-b\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} b^j = e^{-b\lambda} \frac{(b\lambda)^j}{j!}$$

Donc $Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $b\lambda$

et on a $b\lambda > 0$ car $\lambda > 0$ et $b > 0$

Alors, on sait que $E(Y) = Var(Y) = b\lambda$.

2°) Loi conditionnelle de $X$ sachant que $Y=j$ :

$$P(X/Y=j) = \frac{P(X=i, Y=j)}{P(Y=j)}$$

$$= \frac{e^{-b\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} C_j^i a^i (b-a)^{j-i}}{e^{-b\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} b^j} = \frac{1}{b^j} C_j^i a^i (b-a)^{j-i}$$

$$= C_j^i \left(\frac{a}{b}\right)^i \left(1 - \frac{a}{b}\right)^{j-i}$$

Donc, la loi conditionnelle de $X$ sachant que $Y=j$, est une loi binomiale de paramètres $j$ et $\frac{a}{b}$.

comme $0 < a < b$ on a bien $0 < \frac{a}{b} < 1$

3°) Loi marginale de $X$ : $P(X=i) = \sum_{j=i}^{\infty} P(X=i, Y=j)$

$$P(X=i) = \sum_{j=i}^{\infty} e^{-b\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} C_j^i a^i (b-a)^{j-i}$$

$$= e^{-b\lambda} a^i \sum_{j=i}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} C_j^i (b-a)^{j-i}$$

$$= e^{-b\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} a^i \sum_{j=i}^{\infty} \frac{\lambda^{j-i}}{(j-i)!} (b-a)^{j-i}$$

$$= e^{-b\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} a^i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} (b-a)^k$$

$$= e^{-b\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} a^i e^{(b-a)\lambda}$$

$$= e^{-a\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} a^i$$

$X$ suit, donc, une loi de Poisson de paramètre $a\lambda$

on a : $a\lambda > 0$ car $a > 0$ et $\lambda > 0$

Alors, on sait que $E(X) = Var(X) = a\lambda$

4°) Covariance de $X$ et $Y$ : $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Calculons $E(XY)$, puisque on a déja $E(X) = a\lambda$ et $E(Y) = b\lambda$

$$E(XY) = \sum_{0 \leq i \leq j} ij \, P(X=i, Y=j)$$

$$= \sum_{0 \leq i \leq j} ij \, e^{-b\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} C_j^i a^i (b-a)^{j-i}$$

$$= e^{-b\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} (b-a)^j \sum_{i=0}^{j} i \, C_j^i a^i (b-a)^{-i}$$

Or $\sum_{i=0}^{j} i \, C_j^i a^i (b-a)^{-i} = \frac{a}{b-a} \sum_{i=1}^{j} i \, C_j^i \left(\frac{a}{b-a}\right)^{i-1}$

$$= \frac{a}{b-a} \sum_{i=1}^{j} C_j^i \left( \frac{d(x^i)}{dx} \right)_{x=\frac{a}{b-a}}$$

$$= \frac{a}{b-a} \left( \frac{d}{dx} \left( \sum_{i=0}^{j} C_j^i x^i \right) \right)_{x=\frac{a}{b-a}}$$

$$= \frac{a}{b-a} \left( \frac{d}{dx} \left( (1+x)^j \right) \right)_{x=\frac{a}{b-a}}$$

$$= \frac{a}{b-a} \left( j (1+x)^{j-1} \right)_{x=\frac{a}{b-a}}$$

$$= j \frac{a}{b-a} \left( 1 + \frac{a}{b-a} \right)^{j-1}$$

$$= j \frac{a}{b-a} \left( \frac{b}{b-a} \right)^{j-1}$$

Cette formule, établie en supposant que $i$ puisse prendre des valeurs supérieures à $0$, donc en supposant $j$ différent de $0$, est encore valable pour $j=0$, car elle donne la valeur $0$, qui est bien la valeur, pour $j=0$, de l'expression $\sum_{i=0}^{j} i\, C_j^i\, a^i (b-a)^{-i}$.

$$E(XY) = e^{-b\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} (b-a)^j\, j \frac{a}{b-a} \left( \frac{b}{b-a} \right)^{j-1}$$

$$= e^{-b\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} j^2 a b^{j-1}$$

$$= e^{-b\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \left( j(j-1) + j \right) a b^{j-1}$$

$$= e^{-b\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} j(j-1) a b^{j-1} + e^{-b\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} a b^{j-1}$$

$$= e^{-b\lambda} (a\lambda)(b\lambda) \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\lambda^{j-2}}{(j-2)!} b^{j-2} + e^{-b\lambda} (a\lambda) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} b^{j-1}$$

$$= e^{-b\lambda}(a\lambda)(b\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}b^k + e^{-b\lambda}(a\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}b^k$$

$$= e^{-b\lambda}(a\lambda)\left[(b\lambda)+1\right]\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}b^k$$

$$= e^{-b\lambda}(a\lambda)\left[b\lambda+1\right]e^{b\lambda} = a\lambda(b\lambda+1)$$

On en déduit $\mathrm{Cov}(X,Y) = a\lambda(b\lambda+1) - (a\lambda)(b\lambda) = a\lambda$

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = a\lambda}$$

## Exercice 3 :

$\theta > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}x^{-\frac{1+\theta}{\theta}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1°) • $f$ est une fonction positive (puisque $\theta > 0$) définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\theta}\int_1^{+\infty} x^{-\frac{1+\theta}{\theta}}\,dx$$

$$= \frac{-\theta}{\theta}\left[x^{-1/\theta}\right]_1^{+\infty} = \left[\frac{-1}{x^{1/\theta}}\right]_1^{+\infty} = 1$$

D'où $f$ est bien une fonction de densité de probabilité.

Déterminons la fonction de répartition $F$ associée :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_1^x \frac{1}{\theta}t^{-\frac{1+\theta}{\theta}}\,dt = -\frac{\theta}{\theta}\left[t^{-1/\theta}\right]_1^x$$

$$= 1 - x^{-1/\theta} \qquad \text{pour } x \geq 1$$

Donc la fonction de répartition est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - x^{-1/\theta} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

2°) $P(0 < X \leqslant 2) = F(2) - F(0)$

$$= 1 - 2^{-1/\theta}$$

3°) L'espérance mathématique s'écrit :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \frac{1}{\theta} \int_{1}^{+\infty} x^{-1/\theta}\, dx$$

$$= \frac{1}{\theta - 1} \left[ x^{\frac{\theta - 1}{\theta}} \right]_1^{+\infty}$$ converge dans le cas $\theta - 1 < 0$

c'est-à-dire $\theta < 1$

Dans le cas où $0 < \theta < 1$, on aura :

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{1 - \theta}}$$