Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2018/2019
S.M.A.
Semestre 6

Contrôle de Probabilités 2

Durée: 1h30min

Exercice 1 : (8 points)
I.- La loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ est la loi de toute variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ avec $P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}; \quad \forall k \in \mathbb{N}$

1. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $Var(X)$ de la variable X.
2. Calculer la fonction caractéristique φ_X de la variable X et retrouver l'expression de l'espérance mathématique et de la variance de X.

II.- On considère, maintenant, X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes et indépendantes qui suivent des lois de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2 respectivement. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = X_1 + X_2$.

1. Déterminer la fonction caractéristique φ_Y de la variable aléatoire Y et en déduire la loi de la variable Y.
2. Trouver la loi conditionnelle de X_1 par Y.

Exercice 2 : (12 points)
Soit X une variable aléatoire absolument continue qui suit une loi exponentielle $\mathcal{E}xp(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$ ayant pour densité de probabilité $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1. Déterminer F_X la fonction de répartition de X. Donner R_X sa fonction de survie définie par $R_X(x) = 1 - F_X(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
2. Calculer son espérance mathématique $E(X)$ et sa variance $Var(X)$.
3. Déterminer sa fonction génératrice des moments M_X.
4. En déduire l'expression des moments non-centrés $E(X^k)$ d'ordre $k \geqslant 1$ de X. Retrouver l'expression des moments non-centrés d'ordre 1 et 2 et de la variance de X.
5. Démontrer, en utilisant la fonction de survie définie en 1°), que la variable aléatoire X vérifie la propriété d'*absence de mémoire* :
$$P(X > x + u / X > u) = P(X > x); \quad \forall x \geqslant 0; \quad \forall u \geqslant 0.$$
Réciproquement, démontrer que la seule loi absolument continue vérifiant cette propriété est la loi exponentielle.
6. Soit une suite $X_1, X_2, \cdots, X_n$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi exponentielle $\mathcal{E}xp(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$. Notons $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Démontrer, par récurrence, que la loi de S_n est de densité de probabilité $g_n(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
appelée loi d'Erlang d'ordre n.

Barème : Chaque question est notée sur 2 points.

Bonne Chance !